الأدهم
فى
الرياضيـــات
2024
الصف الثالث الإعدادى
تطبيق التعلم التفاعلي عن بعد
الترم الاول
اسم الطالب /
المدرســـة /
الفصـــــل /
إعداد
أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

أولاً : الجبر و الإحصاء

الوحدة الاولى (العلاقات والدوال)

رقم الصفحة

الوحدة الثانية (النسبة والتناسب _ التغير)

الوحدة الثالثة (الإحصاء)

١ ـ حاصل الضرب الديكارتى

الزوج المرتب (أ ، ب)

يسمى (أ ، ب) زوج مرتب ويكون

أ ← المسقط الاول ب ← المسقط الثانى

الفرق بين الزوج المرتب والمجموعة

① {أ ، ب} = {ب ، أ}

② (أ ، ب) ≠ (ب ، أ)

أى أن الترتيب غير مهم فى المجموعة ولكنه مهم داخل الزوج المرتب

③ {أ ، ب} ≠ (أ ، ب)

④ يمكن تكرار عنصر فى الزوج المرتب ولكن لا يمكن التكرار فى المجموعة

(٥ ، ٥) ممكن ولكن {٥ ، ٥} غير ممكن

⑤ توجد مجموعة خالية ولكن لا يوجد زوج مرتب خالى

تساوى زوجين مرتبين

المسقط الاول = المسقط الاول

، المسقط الثانى = المسقط الثانى

أمثلة

① إذا كان (أ ، ب) = (٢ ، ٣)

فإن أ = ٢ ، ب = ٣

② إذا كان (س ، ٥) = (٣ ، ص)

فإن س = ٣ ، ص = ٥

مثال

أوجد قيم س ، ص فى كل مما يأتى .

① (س + ١ ، ٥) = (٣ ، ص − ١)

الحل

س + ١ = ٣	ص − ١ = ٥
س = ٣ − ١	ص = ٥ + ١
∴ س = ٢	∴ ص = ٦

② (س − ٢ ، ٤) = (٥ ، ص + ٣)

الحل

③ (س + ١ ، ص^٢) = (٥ ، ٩)

الحل

س + ١ = ٥	ص^٢ = ٩
س = ٥ − ١	ص = ±√٩
∴ س = ٤	ص = ± ٣

④ (س + ٣ ، س + ص) = (٥ ، ٧)

الحل

حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين منتهيتين

(س × ص) ← (س ضرب ص)

هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول عنصر ∈ س ومسقطها الثاني عنصر ∈ ص

س × ص = {(أ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص}

مثال

إذا كانت س = {١، ٣} ، ص = {٤، ٥، ٧} فأوجد

١) س × ص

٢) ص × س

الحل

١) س × ص = {١، ٣} × {٤، ٥، ٧}

= {(١، ٤)، (١، ٥)، (١، ٧)، (٣، ٤)، (٣، ٥)، (٣، ٧)}

٢) ص × س = {٤، ٥، ٧} × {١، ٣}

= {(٤، ١)، (٤، ٣)، (٥، ١)، (٥، ٣)، (٧، ١)، (٧، ٣)}

نلاحظ أن

س × ص ≠ ص × س

أي أن حاصل الضرب الديكارتي غير إبدالي

ملاحظات هامة

١) س × ص ≠ ص × س

٢) (س × س) ← س²

وتقرأ س اثنين

س² = {(أ، ب) : أ، ب ∈ س}

٣) س × ∅ = ∅ × س = ∅

٤) يرمز لعدد عناصر المجموعة بالرمز ن

٥) لإيجاد ن(س × ص)

نضرب عدد عناصر س × عدد عناصر ص

مثال

إذا كان س = {١، ٢} ، ص = {٤، ٥، ٦}

فأوجد

١) س × ص ومثله بالمخطط السهمي والبياني

٢) ص × س

٣) س² ومثله سهمي - بياني

٤) ن(س × ص)

الحل

١) س × ص = {١، ٢} × {٤، ٥، ٦}

= {(١، ٤)، (١، ٥)، (١، ٦)، (٢، ٤)، (٢، ٥)، (٢، ٦)}

المخطط السهمي

المخطط البياني (الديكارتي)

تدريب: اوجد س × ص وشمثله بالمخطط السهمي والبياني

ص × س =

المخطط السهمي

المخطط البياني

(٣) س² = س × س
= {١ ، ٢} × {١ ، ٢}
= {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢)}

المخطط السهمي

المخطط السهمي

(٤) ن(س × ص) = ٢ × ٣ = ٦
ن(ص × س) = ٣ × ٢ = ٦
ن(س²) = ٢ × ٢ = ٤
ن(ص²) = ٣ × ٣ = ٩

تمرين يحل في الحصة

إذا كان س = {أ ، ب} ، ص = {١ ، ٣ ، ٥}

فأوجد

١- س × ص
٢- ص × س
٣- س²
٤- ص²

} مثلهم بالمخطط السهمي وآخر بياني (ديكارتي)

٥- ن(س × ص) ، ن(ص × س)
٦- ن(س²) ، ن(ص²)

تابع

فاكر التقاطع والاتحاد بتاع الابتدائي

1) س ∪ ص : س اتحاد ص كل اللي في س وص بدون تكرار
2) س ∩ ص : س تقاطع ص نأخذ المشترك في س ، ص
3) س − ص : س فرق ص نأخذ الموجود في س وليس موجود في ص
4) ص − س : ص فرق س نأخذ الموجود في ص وليس موجود في س

كدة افتكرتهم ؟ أي خدمة

مثال

إذا كانت س = {أ ، ب} ، ص = {٣ ، ٥ ، ٧} ، ع = {٥ ، ٧ ، ٩}
مثل المجموعات بشكل فن ثم اوجد

1) س × ص
2) ص × ع } حلهم انت
3) س × ع
4) س × (ص ∪ ع)
5) س × (ص ∩ ع)
6) س × (ع − ص)

الحل

س: أ ، ب
ص: ٣ ، ٥ ، ٧
ع: ٥ ، ٧ ، ٩

4) س × (ص ∪ ع)
= {أ ، ب} × {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}
= {(أ ، ٣) ، (أ ، ٥) ، (أ ، ٧) ، (أ ، ٩) ، (ب ، ٣) ، (ب ، ٥) ، (ب ، ٧) ، (ب ، ٩)}

5) س × (ص ∩ ع)
= {أ ، ب} × {٥ ، ٧}
= {(أ ، ٥) ، (أ ، ٧) ، (ب ، ٥) ، (ب ، ٧)}

6) س × (ع − ص)
= {أ ، ب} × {٩}
= {(أ ، ٩) ، (ب ، ٩)}

تمرين يحل في الحصة

إذا كانت س = {١} ، ص = {٢ ، ٣} ، ع = {٢ ، ٥ ، ٦}
مثل المجموعات بشكل فن ثم اوجد

1) س × ص
2) ص × ع
3) س × ع
4) ص^{٢}
5) (س × ص) ∪ (ص × ع)
6) س × (ص ∩ ع)
7) س × (ص ∪ ع)
8) (ع − ص) × (س ∩ ص)

ملاحظة هامة

إذا كان (أ ، ب) ∈ س × ص

فإن أ ∈ س ، ب ∈ ص

فمثلاً

* إذا كان (٢ ، ٣) ∈ س × ص
  فإن ٢ ∈ س ، ٣ ∈ ص
* إذا كان (٥ ، -٤) ∈ ص × س
  فإن ٥ ∈ ص ، -٤ ∈ س
* إذا كان (٤ ، ٢) ∈ {٣ ، ٤} × {س ، ٥}
  فإن س = ٢

مثال

إذا كان س × ص = {(١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥)} فأوجد

١) س ، ص

٢) ص × س

٣) ص²

الحل

من حاصل الضرب نجد أن كل مسقط أول ∈ س وكل مسقط ثانى ∈ ص

∴ س = {١}

ص = {١ ، ٣ ، ٥}

٢) ص × س

٣) ص²

الواجب

١ أوجد قيمة س ، ص فى كل مما يأتى

١) (س ، ص) = (-٣ ، ٤)

٢) (س ، ص) = (√٢٥ ، ∛٢٧)

٣) (-٢ ، س) = (ص ، ٥)

٤) (س - ٣ ، ص + ١) = (٣ ، ٤)

٥) (٢ س² - ١ ، ص³ - ٥) = (٧ ، ٥٩)

٦) (٣ ، ص) = (٥ س - ٣ ، ٤ س)

٢ إذا كان س = {١ ، ٣} ، ص = {٤ ، ٥} فأوجد

١) س × ص ٢) ص × س

٣) س² ٤) ص²

ومثلهم بالمخطط السهمى والبيانى

٣ إذا كان س × ص = {(٥ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٥ ، ٣) ، (٢ ، ١)} فأوجد

١) س ، ص ٢) ص × س

٢) ن(س × ص) ، ن(س²) ، ن(ص²)

٣) س² ومثلها بالمخطط السهمى والبيانى

٤ إذا كان س = {١ ، ٢} ، ص = {٢ ، ٣} ، ع = {٥ ، ٦} فأوجد

١) س × (ص ∪ ع)

٢) ع × (س ∩ ص)

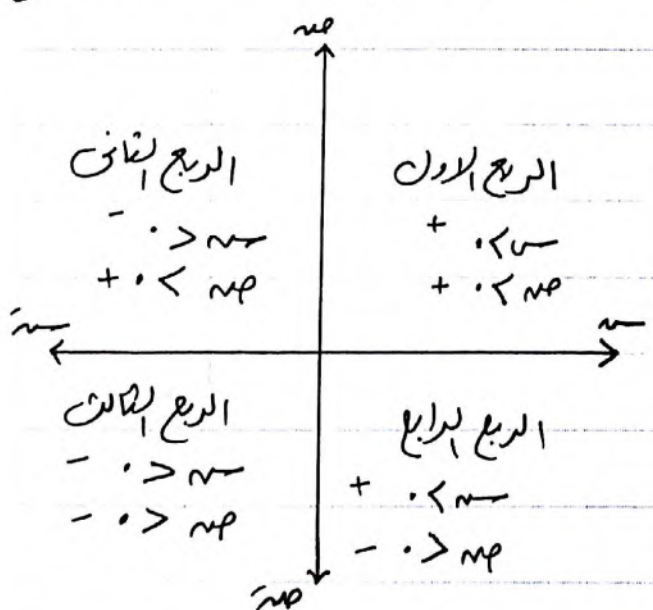
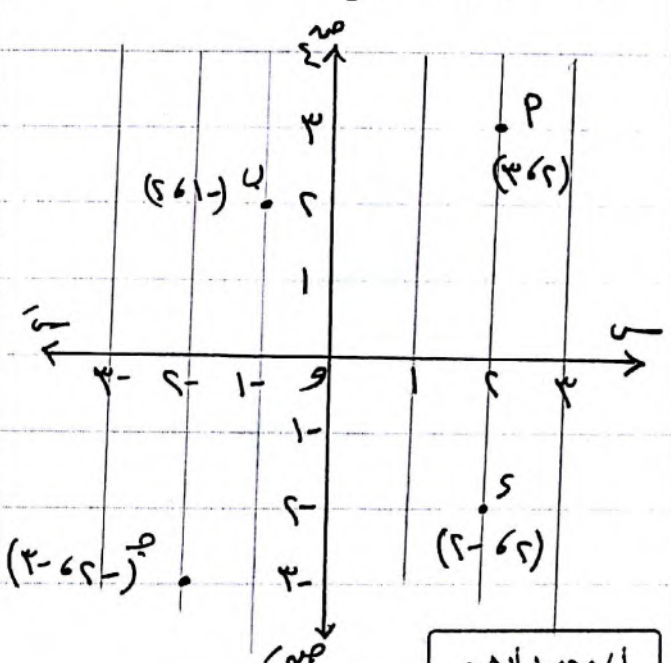
٣) س × (ص - ع)

٥ إذا كان س = {١، ٢، ٣، ٤} ، ص = {٣، ٤، ٥}
فأوجد
١) (س ∩ ص) × ص
٢) (س − ص) × ص
٣) (ص − س) × س

٦ أكمل العبارات الآتية
١) إذا كان س = {١، ٣} ، ص = {٤} فإن ص × س = ...
٢) {٥} × {٣}
٣) إذا كان س = {١، ٢، ٥} فإن ن(س²) = ...
٤) إذا كانت (٢، ٥) ∈ ص × س فإن (٥، ٥) ∈ ...... ، (٢، ٢) ∈ ...... ، (٥، ٢) ∈ ......
٥) إذا كان س = {٢، ٣} فإن س × ∅ = ...
٦) إذا كان س × ص = {(٢، ٦) ، (٢، ٩) ، (٣، ٦) ، (٣، ٩) ، (٥، ٦) ، (٥، ٩)} فإن س = ... ، ص = ...
٧) إذا كان س² = {(٣، ٣) ، (٣، ٥) ، (٥، ٣) ، (٥، ٥)} فإن س = ...

٨) إذا كان س × ص = {(١، ٧) ، (١، ٥)} فإن {٥، ٧} ∈ ...... ، (٥، ٧) ∈ ......
٩) إذا كان ن(ع) = ٣ ، ص = {١، ٢} فإن ن(ع × ص) = ...
١٠) إذا كان ن(ع) = ٤ ، ن(ع × ل) = ١٢ فإن ن(ل) = ...
١١) إذا كان ن(ع × ل) = ١٥ ، ن(ل) = ٥ فإن ن(ع) = ...
١٢) إذا كان ن(س²) = ٩ ، ن(ل) = ٤ فإن ن(ع × ل) = ...
١٣) ن(س²) = ٤ ، ن(ص²) = ٩ فإن ن(س × ص) = ...
١٤) إذا كان ن(س²) = ٩ ، ن(س × ص) = ١٥ فإن ن(ص²) = ...
١٥) إذا كان (س − ١، ١١) = (٨، ص + ٣) فإن √(س + ٢ص) = ...
١٦) إذا كان (س² − ٥، ص/٢) = (١١، ٢) فإن س = ... ، ص = ...
١٧) إذا كان (س/ص ، ص + ٢) = (−١، ٥) فإن ص^س = ...

انتهت كفاية كده

الادهم فى الرياضيات
٧
٣ ع ف ١
حاصل الضرب الديكارتى
لمجموعتين غير منتهيتين
أولاً الحاصل الديكارتى ط×ط (ط٢)
تذكر أن ط = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ...}
∴ ط × ط = {(س، ص) : س، ص ∈ ط}
أ (٠، ٤)
ب (١، ٢)
جـ (٢، ٠)
د (٢، ٣)
هـ (٣، ١)
ثالثاً الحاصل الديكارتى ن×ن (ن٢)
∴ ن × ن = {(س، ص) : س، ص ∈ ن}
ثانياً الحاصل الديكارتى ص×ص (ص٢)
∴ ص × ص = {(س، ص) : س، ص ∈ ص}
رابعاً الحاصل الديكارتى ح×ح = (ح٢)
∴ ح × ح = {(س، ص) : س، ص ∈ ح}
الربع الأول
الربع الثانى
الربع الثالث
الربع الرابع
أ/ محمد أدهم
٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

شوية ملاحظات عنب

① يسمى المستقيم $\overleftrightarrow{سَ سَ}$ محور السينات أو المحور الأفقى
ويسمى $\overrightarrow{وسَ}$ الاتجاه الموجب لمحور السينات
كما $\overrightarrow{وسَ}$ الاتجاه السالب لمحور السينات

② يسمى المستقيم $\overleftrightarrow{ص صَ}$ محور الصادات أو المحور الرأسى
$\overrightarrow{وص}$ الاتجاه الموجب لمحور الصادات
$\overrightarrow{وصَ}$ الاتجاه السالب لمحور الصادات

③ المستقيمان $\overleftrightarrow{سَ سَ}$ ، $\overleftrightarrow{ص صَ}$ متعامدان لذلك تسمى الشبكة البيانية المتعامدة

④ نقطة تقاطع المحورين تسمى بنقطة الاصل "و"

⑤ لأى زوج مرتب (س، ص) فإن س هو المسقط الاول "السينى" ص هو المسقط الثانى "الصادى"

⑥ المستقيمان $\overleftrightarrow{سَ سَ}$ ، $\overleftrightarrow{ص صَ}$ يقسمان المستوى إلى اربع ارباع

الربع الاول س > ٠ ، ص > ٠ (+، +)
الربع الثانى س < ٠ ، ص > ٠ (−، +)
الربع الثالث س < ٠ ، ص < ٠ (−، −)
الربع الرابع س > ٠ ، ص < ٠ (+، −)

⑦ إذا كان الاحداثى السينى للنقطة يساوى صفر فإن النقطة تقع على محور **الصادات** (٠، ص)

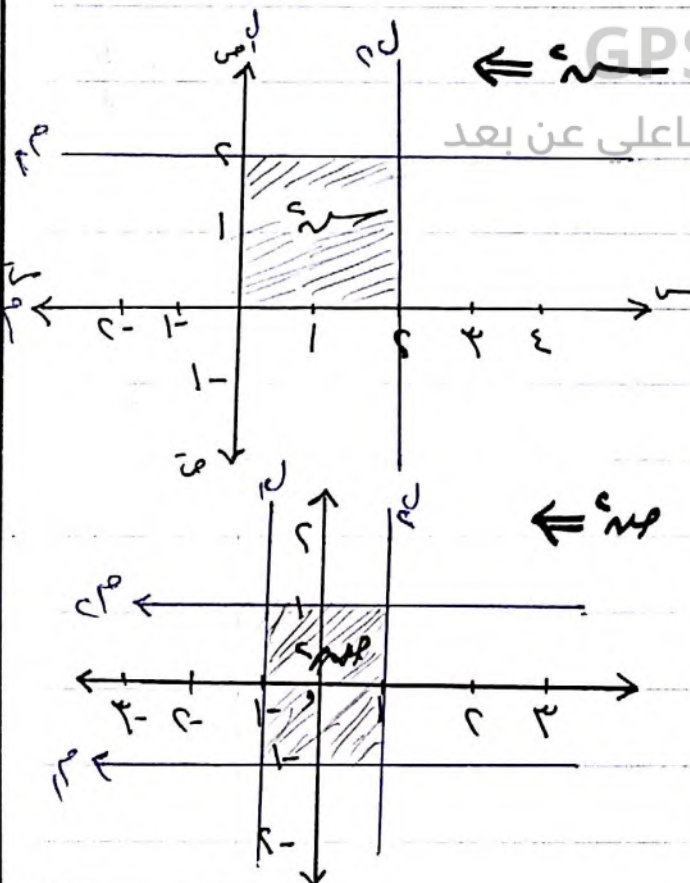
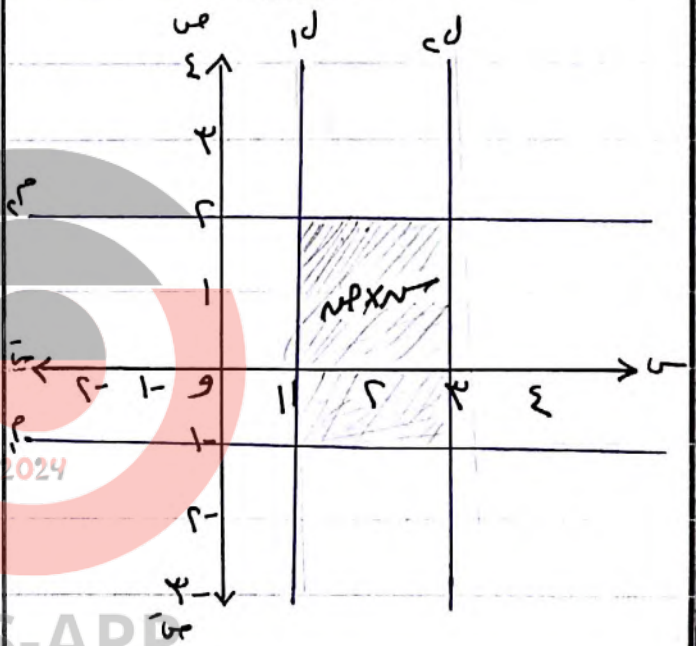
⑧ إذا كان الإحداثى الصادى للنقطة = صفر فإن النقطة تقع على محور **السينات** (س، ٠)

مثال

اذكر الربع أو المحور الذى تقع عليه النقاط التالية.

أ (−١، ٢) ← الربع الثانى
ب (٣، ٥) ← الربع الاول
ج (٣، −٢) ← الربع الرابع
د (٠، ٤) ← محور الصادات
هـ (−٣، −٩) ← الربع الثالث
ل (−٥، ٠) ← محور السينات
م (٠، −٣) ← محور الصادات
ن (−٧، ٠) ← محور السينات

تدريب

أ (١، −٢) ←
ب (−٣، ٥) ←
ج (٠، ٤) ←
د (٢، ٣) ←
هـ (−١، −٤) ←
ل (٥، ٠) ←

مثال ①
إذا كانت س = [١ ، ٣]
، ص = [-١ ، ٢] مثل بيانياً
المنطقة التى تمثل س × ص
ثم بين أى النقط الاتية ∈ س × ص
(-١،١) ، (٢،١) ، (٣،٢)
الحل
(-١،١) ∉ س × ص
(١،٢) ∈ س × ص
(٣،٢) ∈ س × ص
كدة عرضت الحل إزاى ؟
بتاخد المجموعة الاولى وتمثلها على محور السينات وتوصلها رأسى
وتاخد المجموعة الثانية وتمثلها على محور الصادات وتوصلها افقى
وبجديه تشوف منطقة التقاطع
مثال ②
إذا كانت س = [٠ ، ٢]
، ص = [-١ ، ١] مثل بيانياً
المنطقة التى تمثل ① س × ص
② ص × س
③ س٢
④ ص٢
الحل
أولاً س × ص حل انت
، ص × س
س٢ ⇐
ص٢ ⇐

الواجب

١ على شبكة بيانية متعامدة للحاصل الديكارتى (ع × ع) عين النقاط الآتية وحدد الربع أو المحور الذى تقع عليه

أ (٢، ١)
ب (٥، -١)
جـ (٠، ٣)
د (-١، -٢)
هـ (٤، ٠)
م (-٣، ٢)
ل (٦، ٠)
ن (٤، -٢)

٢ على شبكة بيانية متعامدة عين أ (-٢، ٣) ب (٢، ٣) جـ (٢، ٦) ثم أوجد مساحة المثلث أ ب جـ وعين طول أ جـ .

٣ إذا كان س = [٢، ٤] ، ص = [-١، ٣] أوجد المنطقة التى تمثل

١) س × ص
٢) ص × س
٣) س²
٤) ص²

٤ إذا كانت س = [-٢، ٣] أوجد المنطقة التى تمثل س × س ثم بين أى من النقاط الآتية ∈ س × س

أ (١، ٢)
ب (٣، -١)
جـ (-١، ٤)
د (-٢، ٠)

٥ أكمل العبارات الآتية:

١) النقطة (-٢، ٣) تقع فى الربع ....
٢) إذا كانت (٥، ب-٧) على محور السينات فإن ب = ...
٣) إذا كانت (س+٢، ٩) تقع على محور الصادات فإن س = ...
٤) النقطة (٧، -٣) تقع فى الربع ......
٥) " (٣، ٠) تقع على محور ......
٦) " (٠، -٤) تقع على محور ......
٧) إذا كانت (أ، ب) تقع فى الربع الأول فإن أ ب ...... صفر
٨) إذا كانت (أ، ب) تقع فى الربع الثالث فإن أ ب ...... صفر
٩) إذا كانت (أ، ب) تقع فى الربع الثانى فإن أ ب ...... صفر
١٠) إذا كانت النقطة (أ، ب) تقع على محور الصادات فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

٢ ـ العلاقات

أولاً العلاقة من مجموعة إلى مجموعة أخرى :

العلاقة من س إلى ص هي ارتباط يربط بعض أو كل عناصر س ببعض أو كل عناصر ص

ع ⊂ س × ص

مثال ①

إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث "أ ع ب" تعني أ + ب = ٦ اكتب بيان ع ومثلها سهمياً وبيانياً

الحل

بيان ع = {(١ ، ٥) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٣)}

المخطط السهمي — المخطط البياني

مثال ②

إذا كانت س = {١ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} وكانت "أ ع ب" تعني (أ + ب = ٧) اكتب بيان ع ومثله بالمخطط السهمي والبياني

الحل

بيان ع =

مثال ③

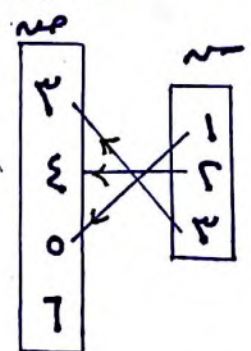
إذا كانت س = {١ ، ٤ ، ٥} ، ص = {٢ ، ٣} بين أي من المجموعات الآتية تمثل علاقة من س إلى ص

س × ص = {(١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣)}

① $ع_1$ = {(٤ ، ٢) ، (١ ، ٢) ، (٥ ، ٣)}
$ع_1$ ⊂ س × ص فهي تمثل علاقة

② $ع_2$ = {(١ ، ٢) ، (٣ ، ١) ، (٢ ، ٤)}
⊄ س × ص فهي ليست علاقة

③ $ع_3$ = {(٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (١ ، ٣)}
⊂ س × ص فهي علاقة

④ $ع_4$ = {(١ ، ٣) ، (٢ ، ٦)} ⊄ س × ص
∴ $ع_4$ ليست علاقة من س إلى ص

ثانياً: العلاقة من مجموعة إلى نفسها (العلاقة على مجموعة)

إذا كانت ع علاقة من س إلى س فإننا نقول أن ع علاقة على س
ويكون ع ⊂ س²

مثال ١

إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}
وكانت ع علاقة على س حيث
"أ ع ب" تعنى أ + ب = ٥ ∀ أ ، ب ∈ س

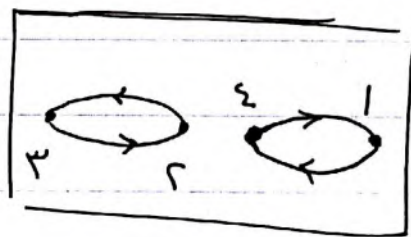
(١) اكتب بيان ع وشلو بالمخطط السهمى
(٢) إذا كان (ل ، ٢) ∈ ع فاوجد قيمة ل
(٣) إذا كانت ٤ ع ك فاوجد قيمة ك

الحل

بيان ع = {(١ ، ٤) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ١)}

المخطط السهمى س

(٢) ∵ (ل ، ٢) ∈ ع ، (٣ ، ٢) ∈ ع
∴ ل = ٣

(٣) ∵ ٤ ع ك ، ٤ ع ١
فإن ك = ١

شوية ملاحظات تحل بيهم مسائل العلاقات
ذاكرهم كويس

(١) أ معكوس ضربى لـ ب
معناه أنه المقلوب بتاعه يعنى
٣ ← $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}$ ← $\frac{5}{2}$ ١ ← ١   -١ ← -١
وخلى بالك الصفر ليس له معكوس ضربى

(٢) أ معكوس جمعى لـ ب
معناه تغيير الاشارة
-٥ ← ٥   ٤ ← -٤
٠ ← ٠ خلى بالك

(٣) "أ" مضاعف من مضاعفات "ب"
معناها أ يقبل القسمة على ب بدون باقى
وانتبه الصفر هو مضاعف لكل الأعداد
لأنه الصفر يقبل القسمة على كل الأعداد = ٠

(٤) "أ تقسم ب" معناها الثانى يقبل القسمة على الأول بدون باقى عكس اللى فوق

(٥) تذكر الأعداد الأولية هى التى تقبل القسمة على نفسها أو الواحد الصحيح فقط
أ = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٩ ، ....}

الواجب

مثال ١ فى كل مما يلى اكتب بيان ع وممثله بالمخطط السهمى وآخر بيانى حيث أ ع ب ، أ ∈ س ، ب ∈ ص

١) س = {١، ٢، ٣} ، ص = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} "أ ع ب" تعنى أ + ب = ٧

٢) س = {٢، ٤، ٥، ٧} ، ص = {٤، ٥، ٦، ٧، ٩} "أ ع ب" تعنى أ ≤ ب

٣) س = {١، ٢، ٣} ، ص = {١، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{5}$} "أ ع ب" تعنى (أ معكوس ضربى لـ ب)

٤) س = {٢، ٣، ٤} ، ص = {١، ٢، ٤، ٦} "أ ع ب" تعنى (أ + ب = عدد أولى)

٥) س = {٢، ٣، ٤} ، ص = {٦، ٨، ١٠، ١١، ١٥} "أ ع ب" تعنى أ تقسم ب

٦) س = {٢، ١، ٠، $\frac{1}{2}$} أ ع ب تعنى (أ معكوس ضربى لـ ب) حيث أ ، ب ∈ س

حيث أ ، ب ∈ س

تذكر الصفر ليس له معكوس ضربى

٧) س = {١، ٢، ٤، ٦} "أ ع ب" تعنى (أ مضاعف لـ ب)

٨) س = {-١، ٠، ١} "أ ع ب" تعنى أ = ب² حيث أ ، ب ∈ س

مثال ٢ إذا كانت س = {٢، ٣، ٤} ، ص = {١، ٤} بين أى من المجموعات الآتية تكون علاقة من س إلى ص

١) ع١ = {(٤، ١)، (٢، ٤)، (٣، ٤)}

٢) ع٢ = {(٤، ٤)، (٢، ١)، (٣، ٢)، (٤، ١)}

٣) ع٣ = {(٢، ١)، (٣، ١)، (٤، ١)}

٤) ع٤ = {(٢، ٤)، (٤، ٤)}

استراحة بسيطة

أكمل

١- كم مرة وقف رمضان صبحى على الكرة ......

٢- كم عدد المرات التى حصل فيها نادى الزمالك على بطولة الدورى العام ......

٣- ماذا كانت نتيجة ماتش ٦ : ١ أى هدف ذاكروا بقه ......

٣ - الدالة (التطبيق)

تعلمنا فى الدرس السابق مفهوم العلاقة وانتوا طبعاً احسن ناس بتحل علاقات صح ؟

** السؤال المهم متى تكون العلاقة دالة ؟

(١) كل عنصر من س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط من احد الازواج المرتبة التى تنتمى إلى بيان ع

(٢) كل عنصر من س يخرج منه سهم واحد فقط من المخطط السهمى

(٣) كل خط رأسى تقع عليه نقطة واحدة فقط من المخطط البيانى للعلاقة ع

مثال (١)

إذا كانت س = {١، ٢، ٣}، ص = {٣، ٤، ٥} نبين أى من العلاقات الاتية تمثل دالة

(١) $ع_1$ = {(١، ٥)، (٢، ٤)، (٣، ٦)}

العلاقة تمثل دالة لأنه كل عنصر من س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط

(٢) $ع_2$ = {(١، ٦)، (٢، ٥)، (٣، ٣)، (٢، ٣)}

ليست دالة لأن العنصر "٢" ظهر كمسقط أول مرتين

(٣) $ع_3$ = {(٢، ٦)، (٣، ٥)}

ليست دالة لأنه العنصر "١" لم يظهر كمسقط أول من احد الازواج المرتبة.

تدريب

إذا كانت س = {٤، ٥، ٧}، ص = {٢، ٣، ٥} بين أى من المخططات السهمية الاتية تمثل دالة

تدريب ثانى

إذا كانت س = {١، ٢، ٣}، ص = {٤، ٥} بين اى من المخططات البيانية التى تمثل دالة

إذا كانت العلاقة ع من س إلى ص دالة فإنه

١) المجموعة س تسمى المجال
٢) المجموعة ص تسمى المجال المقابل
٣) العناصر التي تم اختيارها من ص تسمى المدى

∴ المدى هو مجموعة صور عناصر مجموعة المجال وهو جزئية من المجال المقابل

مثال (١)

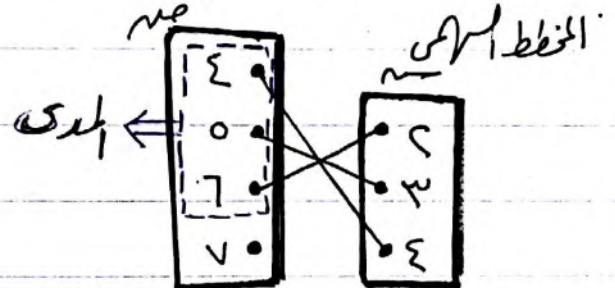
إذا كانت س = {٢، ٣، ٤} ، ص = {٤، ٥، ٦، ٧} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث "أ ع ب" تعني أ + ب = ٨

المطلوب

١- اكتب بيان ع ومثله
٢- هل العلاقة دالة أم ليست دالة
٣- إذا كانت دالة فأوجد المجال والمجال المقابل والمدى

الحل

بيان ع = {(٢، ٦) ، (٣، ٥) ، (٤، ٤)}

المخطط السهمي

العلاقة دالة لأنه كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط في المخطط السهمي للعلاقة.

المجال = س = {٢، ٣، ٤}
المجال المقابل = ص = {٤، ٥، ٦، ٧}
المدى = {٤، ٥، ٦}

ملاحظة هامة

إذا كانت العلاقة ليست دالة فإنه ليس لها مجال أو مجال مقابل أو مدى

تمرين

إذا كانت س = {٢، ١، ٠، ½} وكانت ع علاقة على س حيث "أ ع ب" تعني (أ معكوس جمعي ب) حيث أ، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثله بالمخطط السهمي

الحل

خليك فاكر
المعكوس الجمعي لـ (١) هو (١)
والصفر ليس له معكوس ضربي لأنه القسمة على الصفر غير ممكنة

الواجب

١ في كل مما يلي اكتب بيان ع ومثله بالمخطط السهمي وآخر بياني وحدد إذا كانت العلاقة دالة أم لا وإذا كانت دالة فأوجد المجال والمجال المقابل والمدى

(١) س = {٢، ٣، ٤}
ص = {٦، ٢، ٣، ٤، ٥، ٧، ٨}
"أ ع ب" تعني (أ = $\frac{1}{2}$ ب)

(٢) س = {١، ٢، ٣}، ص = {١، ٣، ٦، ٩، ١٢}
"أ ع ب" تعني ((أ = $\frac{1}{3}$ ب))

(٣) س = {٤، ٦، ٨، ١٠}
ص = {٢، ٣، ٤، ٥}
"أ ع ب" تعني ((أ = ٢ ب))

(٤) س = {٢، ٤، ٥، ٧}
ص = {٤، ٥، ٦، ٧، ٩}
"أ ع ب" تعني ((أ ≥ ب))

(٥) س = {٠، ١، ٢، ٣}
ص = {٠، ١، ٨، ٤، ٩}
أ ع ب تعني ((أ² = ب))

(٦) س = {١، ٢، ٤}
((أ ع ب)) تعني ((أ ضعف ب))

(٧) س = {٢، ٣، ٤}، ص = {٦، ٨، ١٠، ١١، ١٥}
"أ ع ب" تعني ((أ تقسم ب))

---

٢ إذا كانت س = {١، ٣، ٥}، ع دالة على س، بيان ع = {(أ، ٣)، (ب، ١)، (١، ٥)}
فأوجد القيمة العددية أ + ب

---

٣ إذا كانت س = {٣، ٥، ٧، ٩}
فبين أي من المخططات الآتية يمثل دالة

٤ أكمل

١- إذا كانت د تمثل دالة من س إلى ص فإن س تسمى ---، ص تسمى ---، مجموعة صور المجال (س) يسمى ---

٢- إذا كانت ع دالة بيانها {(١، ٢)، (٢، ٥)، (٤، ٧)} فإن مداها = ---

٣- مدى الدالة من الشكل هو ---

٤ – دوال كثيرات الحدود

التعبير الرمزي عن الدالة :

(١) يرمز للدالة عادة بأحد الرموز
(د أو ن أو هـ أو .....)

(٢) فإذا كانت د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإننا نكتب
د : س ← ص
أو د(س) = ص
حيث س ∈ س ، ص ∈ ص

(٣) إذا كانت د دالة من س إلى س
فإن د : س ← س
ونقول د دالة على س

الدالة كثيرة الحدود

الدالة كثيرة الحدود هي دالة قاعدتها (صورة س) هي حد أو مقدار جبري ولابد أن يتوفر شرطان

(١) كل من المجال والمجال المقابل هو مجموعة الاعداد الحقيقية ح

(٢) قوة (أس) المتغير س في أي حد من حدود قاعدتها هو عدد طبيعي

ملاحظة هامة قوى

يجب التعرف على ما إذا كانت الدالة كثيرة حدود أم لا قبل وضع قاعدتها في أبسط صورة

مثال (١)

بين أي من الدوال الاتية كثيرة حدود

(١) الدالة د : د(س) = ٣
الدالة د : د(س) = ٢س + ٥
الدالة ر : ر(س) = س² + س − ٥
الدالة س : س(س) = ٢س² − $\frac{١}{٢}$س

(٢) الدالة ن : ن(س) = س³ + $\sqrt{س}$ − ٣
الدالة هـ : هـ(س) = س³ + $\frac{١}{س}$
الدالة م : م(س) = س(س + $\frac{٣}{س}$)

لاحظ جيداً : الدالة د : د(س) = س($\frac{١}{س}$)
ليست كثيرة حدود
، س(س + $\frac{٣}{س}$) ليست كثيرة حدود على الرغم انه عند الاختصار تكون (س² + ٣) ← ولكنها تكون صورة أخرى للدالة أخرى

درجة الدالة

هي اكبر قوة للمتغير في قاعدة الدالة

مثلاً

(١) د₁(س) = ٣س − ٢ من الدرجة الاولى (خطية)
(٢) د₂(س) = س² − ٥س من الدرجة الثانية (تربيعية)
(٣) د₃(س) = س³ − ٢س² + ٧س من الدرجة الثالثة (تكعيبية)
(٤) د₄(س) = ٧ ثابتة (صفرية)

ملاحظة هامة على درجة الدالة الثابتة

* $د(س) = P$ حيث $P \in ح - \{٠\}$
كثيرة حدود من الدرجة صفر (دالة ثابتة)

* ومن حالة $P = ٠$ أى عندما
$د(س) = ٠$ فإن الدالة ليس لها درجة

عند بحث درجة الدالة يجب تبسيط قاعدتها إلى ابسط صورة قبل تعيين درجتها

مثال (١)

اذكر درجة كل من الدوال الاتية

(١) $د(س) = ٥ - ٣س$
من الدرجة الاولى (دالة خطية)

(٢) $د(س) = ٣س - س^٢$
من الدرجة الثانية (دالة تربيعية)

(٣) $د(س) = ٥س - ٣س^٢ + س^٣$
من الدرجة الثالثة (دالة تكعيبية)

(٤) $د(س) = س^٢(٢ + س)^٢$
$س^٢ \times س^٢ = س^٤$ أعلى أس من الدرجة الرابعة

(٥) $د(س) = س(س^٣ + س^٢)$
$- س^٢(س^٢ - ٢س)$
$= س^٤ + س^٣ - س^٤ + ٢س^٣$
$= س^٣ + ٢س^٣ = ٣س^٣$
من الدرجة الثالثة
(دالة تكعيبية)

مثال (٢)

إذا كانت د: $د(س) = س^٢ - ٢س + ٥$

(١) أوجد $د(١)$ ، $د(٠)$ ، $د(-٢)$
$د(\frac{١}{٢})$ ، $د(\sqrt{٥})$

الحل

$د(١) = (١)^٢ - ٢(١) + ٥ = ١ - ٢ + ٥$
$= ٤$

$د(٠) = (٠)^٢ - ٢(٠) + ٥ = ٥$

$د(-٢) = (-٢)^٢ - ٢(-٢) + ٥ = ١٣$

$د(\frac{١}{٢}) =$

$د(\sqrt{٥}) =$

$د(-١) =$

مثال (٣)

إذا كانت $د(س) = س^٢ - ٣س$
، $ر(س) = س - ٣$

(١) فأوجد $د(٢) - ر(٥)$

(٢) اثبت أن $د(٣) = ر(٣) =$ صفر

الحل

(١) $د(٢) = ٢^٢ - ٣ \times ٢ = ٤ - ٦ = -٢$

$ر(٥) = ٥ - ٣ = ٢$

$\therefore د(٢) - ر(٥) = -٢ - ٢ = -٤$

(٢) $د(٣) = ٣^٢ - ٣ \times ٣ = ٩ - ٩ =$ صفر

$ر(٣) = ٣ - ٣ =$ صفر

ذاكر // افهم // ركز
وادنع فلوس الدرس تبقى ممتاز

إزاى تجيب قاعدة الدالة من بيانها مع "ركز معايا"

مثال (١)

إذا كان بيان الدالة

د = {(٠، ٤)، (١، ٣)، (٢، ٢)، (٣، ١)}

اكتب المجال = {٠، ١، ٢، ٣}

المدى = {٤، ٣، ٢، ١}

حدد قاعدة الدالة

نلاحظ أن مجموع س، ص (د(س)) = ٤

∴ س + د(س) = ٤

قاعدة الدالة: د(س) = ٤ − س

مثال (٢)

إذا كان بيان الدالة د = {(١، ٣)، (٢، ٥)، (٣، ٧)، (٤، ٩)، (٥، ١١)}

فأوجد المجال =

المدى =

قاعدة الدالة ←

ص = ٢ س + ١

∴ قاعدة الدالة د(س) = ٢ س + ١

الواجب

١ أى من الدالة الآتية تمثل كثيرة حدود (عين درجتها إذا كانت كثيرة حدود)

(١) د : د(س) = ٢ س − ٥

(٢) د : د(س) = ٣

(٣) د : د(س) = س + $\frac{١}{س}$

(٤) د : د(س) = س^٣ + س^٤ + ٣

(٥) د : د(س) = س^٤ + √س + ٨

(٦) د : د(س) = س (س^٤ + س^٢ − ٤)

(٧) د : د(س) = س (س^٢ + ٧)

٢ إذا كانت د : د(س) = س^٢ − ٣

فأوجد د(١) د(−١)

د(٠) د(٢)

٣ إذا كانت د دالة على س حيث س = {٣، ٤، ٥، ٦} وكان

د(٣) = ٣ ، د(٤) = ٥

د(٥) = ٥ ، د(٦) = ٥

(١) مثل د بمخطط سهمى

(٢) اكتب بيان د واذكر مداها

٤ إذا كانت د : د(س) = س − ٤

فأوجد د(٧) = --- ومجال د = ---

٥ إذا كانت د(س) = س^٢ − س + ٣

فأوجد د(−٣) = -----

٦ د(س) = ٥ س^٢ + ٧ من الدرجة -----

٧ مجموعة صور عناصر مجال الدالة تسمى -----

٨ د(س) = س^٢ − ٢√٢ س فأوجد

د(√٢) = -----

٩ د(س) = ك س + ٨ ، د(٢) = صفر

فأوجد ك =

دراسة بعض دوال كثيرات الحدود

أولاً الدالة الخطية

الدالة الخطية هي دالة الدرجة الأولى التي يكون أس المتغير فيها = ١

مثل د(س) = س - ١

د(س) = ٥س + ٢

د(س) = ٧س + ١٢

وتمثل بخط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ب)

ومحور السينات ($\frac{-ب}{أ}$ ، ٠)

حيث د(س) = أ س + ب

مثال (١)

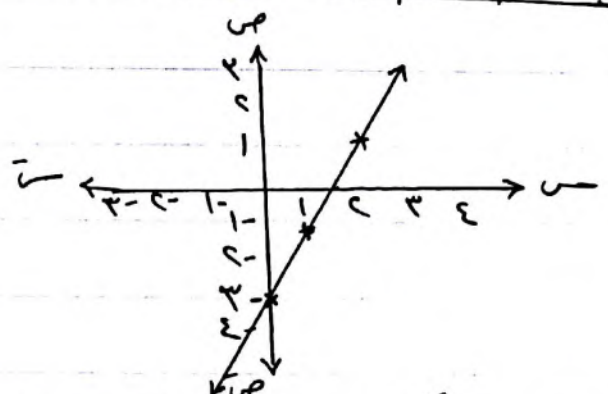
مثل بيانياً د(س) = ٢س - ٣

الحل

د(٠) = ٠ - ٣ = -٣

د(١) = ٢ - ٣ = -١

د(٢) = ٤ - ٣ = ١

س	٠	١	٢
ص = د(س)	-٣	-١	١

مثل بيانياً د(س) = ٣س - ٣

الحل (تمرين)

ملاحظة د : ح ← ح حيث د(س) = أ س ، أ ∈ ح* تمثل بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل .

تمرين مثل بيانياً كل من الدوال الآتية

١) د(س) = س - ٢

٢) د(س) = ٢ س

٣) د(س) = ٣س - ٥

ثانياً الدالة الثابتة

د : ح ← ح حيث د(س) = ب ، ب ∈ ح

تسمى دالة ثابتة وهي كثيرة حدود من الدرجة صفر

فمثلاً إذا كان د(س) = ٥

فإن د(١) = ٥ ، د(٣) = ٥

د(٠) = ٥ وهكذا

مثال (٣)

مثل بيانياً كلاً من

١) د : د(س) = ٢

(٢) د(س) = -٢

الحل

ص، ٢، ١، ١-، -٢، -٣، ص َ
س َ، -٢، -١، ١، ٢، س

د(س) = -٢

(٣) د(س) = ٠ (محور السينات)

ص، س َ، د(س) = ٠، س، ص َ

المستقيم منطبق على محور السينات

مثال (٤)

مثل بيانياً د(س) = -٥
ثم أوجد

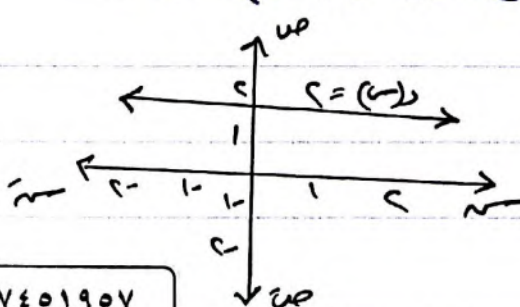
(١) درجة الدالة د — الدرجة الصفرية

(٢) د(٥) — د(٥) = -٥

(٣) د(١) + د(٢) — د(١) = -٥

د(٢) = -٥ — د(١) + د(٢) = -٥ + (-٥)
= -١٠

(٤) د(-س)

د(-س) =

ثالثاً: الدالة التربيعية

الدالة د: ح ← ح حيث د(س) =
د(س) = أ س^2 + ب س + جـ تسمى دالة
تربيعية (كثيرة حدود من الدرجة الثانية)

أمثلة

د: ح ← ح ، د(س) = س^2
د: ح ← ح ، د(س) = - س^2
د: ح ← ح ، د(س) = س^2 - ٧
د(س) = ٧ - س^2 + س

مثال (١)

مثل بيانياً د: د(س) = س^2
حيث س ∈ [-٣، ٣]

الحل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
د(س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

نقطة رأس المنحنى (٠، ٠)
معادلة محور التماثل س = ٠
القيمة الصغرى = ٠

ص، ٩، ٨، ٧، ٦، ٥، ٤، ٣، ٢، ١، -١، -٢، ص َ
س َ، -٣، -٢، -١، ١، ٢، ٣، س

شوية ملاحظات زى الفل

① إذا كان معامل $س^٢$ موجب

فإن المنحنى يكون مفتوحاً لأعلى

ويكون للدالة قيمة صغرى

② إذا كان معامل $س^٢$ سالب

فإن المنحنى يكون مفتوحاً لأسفل

ويكون للدالة قيمة عظمى

③ نقطة رأس المنحنى فى الغالب

تتكون فى منتصف الجدول (س١، ص١)

④ معادلة محور التماثل هى س = س١

⑤ القيمة العظمى أو الصغرى هى ص = ص١

⑥ الاحداثى السينى لرأس المنحنى = $\frac{-ب}{٢أ}$

والاحداثى الصادى = د$\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$

⑦ إذا كان المنحنى يقطع محور السينات فى نقطة فإن الاحداثى الصادى = صفر

مثال (١)

ارسم منحنى الدالة د(س) = $س^٢$ - ٢س - ٣

متخذاً س ∈ [-٢، ٤] ومن الرسم أوجد

① نقطة رأس المنحنى

② معادلة محور التماثل

③ القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

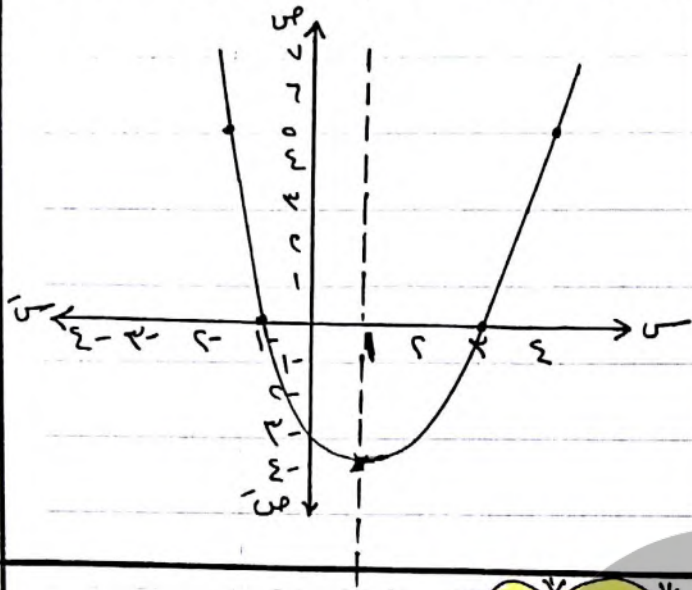
الحل

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص = د(س)	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥

① نقطة رأس المنحنى (١، -٤)

② معادلة محور التماثل س = ١

③ القيمة الصغرى للدالة = -٤

* لو سأل عن القيمة العظمى الاجابة لا توجد

تمرين (١)

ارسم منحنى الدالة د(س) = ٢ - $س^٢$

متخذاً س ∈ [-٣، ٣]

ومن الرسم أوجد

① نقطة رأس المنحنى

② معادلة محور التماثل

③ القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

الحل

الواجب

[١] مثل بيانياً كلاً من الدوال الاتية حيث س ∈ ح :

① د : د(س) = ٥ ② د(س) = -٤

③ د(س) = صفر ④ د(س) = ٢ ½

[٢] مثل بيانياً كلاً من الدوال الخطية الاتية وأوجد نقطتى تقاطع المستقيم الممثل لها مع محورى الاحداثيات

① د(س) = ٣س ② د(س) = -٢س

③ د(س) = س + ٢ ④ د(س) = ٢ - س

⑤ د(س) = ٣س - ١ ⑥ د(س) = -٢س + ٣

[٣] مثل بيانياً كلاً من الدوال الاتية ومن الرسم استنتج إحداثى رأس المنحنى معادلة محور التماثل القيمة العظمى أو الصغرى

① د(س) = س² - ٢ ، س ∈ [-٣ ، ٣]

② د(س) = س² + ٢س + ١ [-٤ ، ٢]

③ د(س) = (س - ٢)² [-١ ، ٥]

④ د(س) = ١ - ٣س + س² [-١ ، ٤]

⑤ د(س) = -٢س² [-٢ ، ٢]

[٤] إذا كان المنحنى د(س) = م - س² يقطع محور السينات فى (-٢ ، ل) فأوجد قيمة م² + ٢م (الشرقية ٢٠١٠)

[٥] إذا كان د(س) = ٢س + ب ، ر(س) = ب حيث د ، ر كثيرات حدود وكان د(١) + ر(٤) = ١٢ فأوجد قيمة د(٤) + ر(-١) (الشرقية ٢٠١٣)

[٦] من الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١٤)

الدالة الثابتة د تمثل بالمستقيم ب أ ↔ والدالة الخطية ر تمثل بالمستقيم و أ ↔ حيث أ (٢ ، ٣)

① اكتب قاعدة الدالة د ، الدالة ر

② أوجد قيمة د(-١٠) + ر(٦)

[٧] إذا كان د(س) = س² [-٢ ، ٢] فإن د(س) ∈ ----

[٨] المستقيم المنطبق على محور السينات هو المستقيم الممثل للدالة د(س) = ---

[٩] إذا كانت د(س) = -٣ فإن د(١) = ...

[١٠] إذا كان د(س) = ٢ فإن د(١) + د(-١) = ...

[١١] إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على خط المستقيم الدالة د(س) = ٤س - ٥ فإن أ = ---

[١٢] إذا كان لمنحنى الدالة التربيعية قيمة عظمى فإن المنحنى يكون مفتوحاً ---- وتكون اشارة س² ---

تعريف النسبة

النسبة بين الكميتين أ ، ب هي عدد مرات احتواء العدد أ على العدد ب وتكتب

أ : ب أو $\frac{أ}{ب}$

ويسمى أ مقدم النسبة ، ب تالي النسبة ، أ و ب معاً حدي النسبة

خواص النسبة

خاصية (١)

النسبة لا تتغير إذا ضرب حداها في أو قسما على عدد حقيقي لا يساوي صفر

وهكذا $\frac{٣}{٥} = \frac{٣ \times ٢}{٥ \times ٢} = \frac{٦}{١٠}$

وكذلك $\frac{٨}{١٠} = \frac{٨ \div ٢}{١٠ \div ٢} = \frac{٤}{٥}$

خاصية (٢)

النسبة تتغير إذا أضيف إلى أو طرح من حديها عدد حقيقي لا يساوي الصفر

$\frac{٣}{٥} \neq \frac{٣+٥}{٥+٥} \neq \frac{٨}{١٠}$

خاصية (٣) حاصل ضرب الطرفين = الوسطين

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

فإن أ × د = ب × جـ

ملاحظة

إذا كانت النسبة بين عددين ٣ : ٥ فإننا نفرض أن العدد الأول = ٣ س والثاني ٥ س (أو أي ثابت آخر)

مثال (١)

عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٤ وإذا أضيف للعدد الأصغر ٤ ، وطرح من العدد الأكبر ٣ صارت النسبة ٨ : ٩ أوجد العددين

الحل

نفرض أن العدد الأصغر = ٣ س

والعدد الأكبر = ٤ س

∴ $\frac{٣س + ٤}{٤س - ٣} = \frac{٨}{٩}$

٩ (٣ س + ٤) = ٨ (٤ س − ٣)

٢٧ س + ٣٦ = ٣٢ س − ٢٤

٢٧ س − ٣٢ س = − ٢٤ − ٣٦

− ٥ س = − ٦٠

س = $\frac{-٦٠}{-٥}$ = ١٢

∴ العدد الأصغر = ٣ × ١٢ = ٣٦

العدد الأكبر = ٤ × ١٢ = ٤٨

تمرين (١)

أوجد العدد الذي إذا أضيف مربعه إلى كل من حدي النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

تمرين (٢)

ما العدد الموجب الذي إذا طرح من مقدم النسبة ١٣ : ١٥ وأضيف مربعه إلى تاليها فإن النسبة = المعكوس الجمعي للعدد ٥

٢ ـ التناسب

تعريف التناسب (مهم)

هو تساوى نسبتين أو أكثر

ملاحظات هامة

إذا كان م ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة فإن

١ $\frac{م}{ب} = \frac{جـ}{ء}$ ويكون م × ء = ب × جـ

٢ ويسمى م بالأول المتناسب

ب الثانى المتناسب

جـ الثالث المتناسب

ء الرابع المتناسب

٣ يسمى م ، ء طرفا التناسب

، ب ، جـ وسطا التناسب

مثال (١)

١ أوجد الثالث المتناسب للكميات

٣ ، ٤ ، ..... ، ٢٠

الحل

$\frac{٣}{٤} = \frac{س}{٢٠}$

$س = \frac{٣ \times ٢٠}{٤} = \frac{٦٠}{٤} = ١٥$

٢ أوجد الرابع المتناسب للكميات

١٨ م٢ ب ، ١٢ م ب٢ ، ٢١ م ب ، .....

الحل

$\frac{١٨ م^٢ ب}{١٢ م ب^٢} = \frac{٢١ م ب}{س}$

$س = \frac{١٢ م ب^٢ \times ٢١ م ب}{١٨ م^٢ ب}$

$س = \frac{١٢ \times ٢١}{١٨} = ١٤ ب^٢$

تمرين (١)

١ أوجد الثالث المتناسب للكميات

٥ م ب ، ٢ م ب٢ ، ٤ م٢ ب

الحل

٢ أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ١٧ : ٢٢ فإننا نحصل على النسبة ٦ : ٧

الحل

٣ أوجد الثالث المتناسب للكميات

(س٢ - ٣س) ، (س٢ - ٩) ، (س + ٣)

الحل

٤ أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى الاعداد ١ ، ١٣ ، ٧ ، ٣١ لحصلنا على اعداد متناسبة

خاصيه (١) الضرب التبادلى

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن

$أ \times د = ب \times جـ$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

خاصيه (٢)

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

فإن $أ = م \times جـ$ ، $ب = م \times د$

حيث $م \ni ح^*$

أى أن مقدم = ثابت × مقدم

وتالى = ثابت × تالى

⟸ مثلاً $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$

فإن $أ = ٢م$ ، $ب = ٣م$

مثال (١)

إذا كان $س : ص = ٢ : ٣$

فأوجد النسبه $(٣س + ٢ص) : (٢س + ص)$

الحل

$\because \frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore س = ٢م$ ، $ص = ٣م$

$\therefore \frac{٣س + ٢ص}{٢س + ص} = \frac{٣ \times ٢م + ٢ \times ٣م}{٢ \times ٢م + ٣م}$

$= \frac{٦م + ٦م}{٤م + ٣م} = \frac{١٢م}{٧م} = \frac{١٢}{٧}$

مثال (٢)

إذا كان $أ : ب = ١ : ٢$

، $س : ص = ٣ : ٥$

فأوجد النسبه $(٢أس + ب ص) : (٥ب س - ٢أص)$

الحل

$\because \frac{أ}{ب} = \frac{١}{٢}$ $\therefore أ = ك$ ، $ب = ٢ك$

، $\because \frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$ $\therefore س = ٣م$ ، $ص = ٥م$

$\therefore \frac{٢أس + ب ص}{٥ب س - ٢أص} = \frac{٢ \times ك \times ٣م + ٢ك \times ٥م}{٥ \times ٢ك \times ٣م - ٢ \times ك \times ٥م}$

$= \frac{٦ك م + ١٠ك م}{٣٠ك م - ١٠ك م} = \frac{١٦ك م}{٢٠ك م} = \frac{٤}{٥}$

مثال (٣) إذا كان

$أ : ب = ٢ : ٣$ ، $ب : جـ = ٢ : ٥$

وكان $٣أ + ب - هـ = ٩$ فأوجد

قيمه كلاً من أ ، ب ، هـ

الحل

أ : ب : جـ

٢ : ٣

٢ : ٥

بالضرب × ٢

بالضرب × ٣

فيكون أ : ب : هـ

٤ : ٦

٦ : ١٥

$\therefore أ : ب : هـ = ٤ : ٦ : ١٥$

$\therefore أ = ٤م$ ، $ب = ٦م$ ، $هـ = ١٥م$

، $\because ٣أ + ب - هـ = ٩$

$١٢م + ٦م - ١٥ = ٩$ $٣م = ٩$

$\therefore م = ٣$ فيكون $أ = ١٢$ $ب = ١٨$ $هـ = ٤٥$

تمرين (١)

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$

فأثبت أن (٧ أ س + ٤ ب ص) ، (١١ أ ص + ب س) ، ١٢ ، ١٤ كميات متناسبة

الحل

خاصية (٣)

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن

$\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$ أى أن $\frac{\text{مقدم ١}}{\text{مقدم ٢}} = \frac{\text{تالى ١}}{\text{تالى ٢}}$

مثلاً إذا كان $\frac{أ}{٧} = \frac{ب}{٢١}$

فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{٧}{٢١} = \frac{١}{٣}$

إذا كان ٥ أ ، ٢ ص ، ٣ ب ، ٧ ص كميات متناسبة فإن

$\frac{٥ أ}{٢ ص} = \frac{٣ ب}{٧ ص}$

$\frac{٥ أ}{٣ ب} = \frac{٢ ص}{٧ ص}$ ، $\frac{٥ أ}{٣ ب} = \frac{٢}{٧}$

$\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٧} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٦}{٣٥}$

خاصية (٤)

إذا كان أ × د = ب × جـ فإن

$\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

مثلاً إذا كان

٣ س = ٥ ص فإنه $\frac{س}{ص} = \frac{٥}{٣}$

٧ أ = ٢ ب فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٧}$

مثال (١) أوجد $\frac{س}{ص}$ لكل مما يأتى

(١) ١٢ س = ٣ ص

$\frac{س}{ص} = \frac{٣}{١٢} = \frac{١}{٤}$

(٢) $\frac{١}{٢}$ س = $\frac{٣}{٤}$ ص

$\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤} \div \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤} \times \frac{٢}{١} = \frac{٣}{٢}$

(٣) ٣ أ − ٧ ب = ٠

٣ أ = ٧ ب ، $\frac{أ}{ب} = \frac{٧}{٣}$

مثال (٢) إذا كان

٤ س − ٣ ص : ٢ س + ص = ٤ : ٧

فأوجد فى أبسط صورة س : ص

الحل

$\frac{٤ س - ٣ ص}{٢ س + ص} = \frac{٤}{٧}$

٧ (٤ س − ٣ ص) = ٤ (٢ س + ص)

٢٨ س − ٢١ ص = ٨ س + ٤ ص

$٢٨س - ٨س = ٤ص + ١٦ص$

$٢٠س = ٢٥ص$

$\frac{س}{ص} = \frac{٢٥}{٢٠} = \frac{٥}{٤}$

تمرين إذا كان

$٢س^٢ - ٦ص^٢ = س ص$

فأوجد س : ص

الحل

عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٥ فإذا طرح من الأول ٢ وأضيف للثانى ١ صارت النسبة ١ : ٤ أوجد العددين

الحل

الواجب

(١) أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

(٢) أوجد العدد الذى إذا طرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فإنها تصبح ٢ : ٣

(٣) أوجد العدد الذى إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

(٤) عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ إذا طرح من كل منهما ٥ اصبحت النسبة ١ : ٣ أوجد العددين

(٥) عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣ وإذا أضيف للأول ٧ وطرح من الثانى ١٢ صارت النسبة ٥ : ٣ أوجد العددين

(٦) أوجد الأول المتناسب

(٥ ، ٩ ، ١٥) ، (٤ ، ٥ ، ٢٠)

(٧) أوجد الثانى المتناسب

$٥ل^٣م ، ١٥ ، ل^٢م ، ٦م^٢$

(٨) أوجد الثالث المتناسب

٣ ، ٢٠ ، ٢

١ ، $\overline{٧٨}$ ، ١٤ ، $\overline{٧٢}$

$(م^٢ + م) ، (٢م^٢ + ٢م) ، ٦$

(٩) أوجد الرابع المتناسب

$٢م ن ، م^٢ ، ٤ ، م^٢ ب$

(١٠) اوجد العدد الذى إذا أضيف للكميات الاتيه فإنها تصبح متناسبه

١٥ ، ٢٠ ، ١١ ، ١٤

(١١) العدد الذى إذا طرح من الكميات الاتيه فإنها تصبح تتناسب؟

٣ ، ١٠ ، ٢ ، ٨

(١٢) إذا كانت $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$

فأوجد قيمه

(١) $\frac{٣س + ٢ص}{٥س - ص}$ (٢) $\frac{س^٢ + ٢ص^٢}{ص^٢ - س^٢}$

(١٣) إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$

فأوجد قيمه $(٧س + ٩ص) : (٤س + ٢ص)$

(١٤) إذا كان س : ص = ١ : ٢

، ع : ل = ٧ : ٢

فأوجد قيمه $\frac{٢س ع + ص ل}{ص ع - ٣س ل}$

(١٥) إذا كان أ : ب = ٣ : ٧

، أ : جـ = ٢ : ٥

وكان ب + جـ - ٣أ = ٣٣

فأوجد قيمه أ ، ب ، جـ

(١٦) إذا كان س : ص : ع = ١ : ٢ : ٥

وكان س + ٢ص + ٣ع = ٨٠

فأوجد قيمه س ، ص ، ع

(١٧) إذا كان ٣س ، ٢ص ، ٦ع ، ٩ص كميات متناسبه فأوجد $\frac{س}{ع}$

(١٨) إذا كان ٢أ = ٣ب = ٤جـ

وكان ٢ب + جـ - أ = ٧٫٥

فأوجد أ ، ب ، جـ

اكمل العبارات الاتيه

(١) ٣س + ٢ص = ٠

فإن $\left(\frac{ص}{س}\right)^٣ = ---$

(٢) ٤٩س^٢ - ١٦ص^٢ = ٠ حيث

س ، ص ∈ ح^+ فإن $\left(\frac{س}{ص}\right) = ---$

(٣) إذا كان أ : ب = ٢ : ٥

أ : جـ = ٣ : ٤ فإن ب : جـ = ---

(٤) $\frac{٤س^٢ - ٩ص^٢}{-------} = \frac{٢س - ٣ص}{٢س + ٣ص}$

(٥) التناسب هو ---

(٦) قسم مبلغ بين شخصين بنسبه ٢ : ٣

فإذا كان نصيب اولهما = ٣٠ جنيها

فإن نصيب الآخر = ---

(٧) ٧س = ٣ص ⇐ $\frac{س}{ص} = ---$

(٨) $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣}$ فإن $\frac{٢أ}{٣ب} = ---$

$\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ بالضرب × $\frac{٢}{٣}$

$\frac{٢أ}{٣ب} = \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٩}$

تابع خواص التناسب

خاصية (٥)

إذا كان أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ....

كميات متناسبة فإنه كما سبق يكون:

$\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = \dots =$ ك فرضاً

ويكون أ = ك ب ، جـ = ك د

هـ = ك و وهكذا

أي أن : مقدم = ثابت × تالي

مثال (١)

إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فأثبت أن

① $\left(\frac{أ + ب}{جـ + د}\right)^2 = \frac{2أ^2 - 3ب^2}{2جـ^2 - 3د^2}$

الحل

$\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} =$ ك فرضاً

∴ أ = ك ب ، جـ = ك د

∴ الطرف الأيمن $= \left(\frac{ك ب + ب}{ك د + د}\right)^2$

$= \left(\frac{ب(ك+1)}{د(ك+1)}\right)^2 = \left(\frac{ب}{د}\right)^2 \leftarrow$ ①

الطرف الأيسر $= \frac{2ك^2ب^2 - 3ب^2}{2ك^2د^2 - 3د^2}$

$= \frac{ب^2(2ك^2 - 3)}{د^2(2ك^2 - 3)} = \left(\frac{ب}{د}\right)^2 \leftarrow$ ②

∴ الطرفان متساويان

② $\sqrt[3]{\frac{5أ^3 - 3جـ^3}{5ب^3 - 3د^3}} = \frac{أ + جـ}{ب + د}$

الحل

الطرف الأيمن $= \sqrt[3]{\frac{5(ك ب)^3 - 3(ك د)^3}{5ب^3 - 3د^3}}$

$= \sqrt[3]{\frac{5ك^3ب^3 - 3ك^3د^3}{5ب^3 - 3د^3}}$

$= \sqrt[3]{\frac{ك^3(5ب^3 - 3د^3)}{(5ب^3 - 3د^3)}}$

$= \sqrt[3]{ك^3} =$ ك $\leftarrow$ ①

الطرف الأيسر

$= \frac{ك ب + ك د}{ب + د}$

$= \frac{ك(ب + د)}{(ب + د)} =$ ك $\leftarrow$ ②

من ① ، ② ∴ الطرفان متساويان

تمرين

إذا كان أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و كميات متناسبة فأثبت أن

$\sqrt{\frac{5أ^2 - 7جـ هـ}{5ب^2 - 7د و}} = \frac{2أ + جـ}{2ب + د}$

مثال (٢)

إذا كان $\frac{ا^2 - ٢ حـ^2}{ب^2 - ٢ ء^2} = \frac{ا^2}{ب^2}$

اثبت أن ا ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة

الحل

∵ $\frac{ا^2 - ٢ حـ^2}{ب^2 - ٢ ء^2} = \frac{ا^2}{ب^2}$

طرفين × وسطين

$ب^2 (ا^2 - ٢ حـ^2) = ا^2 (ب^2 - ٢ ء^2)$

$ا^2 ب^2 - ٢ ب^2 حـ^2 = ا^2 ب^2 - ٢ ا^2 ء^2$

بحذف $ا^2 ب^2$ من الطرفين

$- ٢ ب^2 حـ^2 = - ٢ ا^2 ء^2$ [÷ -٢]

$ب^2 حـ^2 = ا^2 ء^2$

∴ $\frac{ا^2}{ب^2} = \frac{حـ^2}{ء^2}$ بأخذ √ للطرفين

∴ $\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{ء}$

∴ ا ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة

خاصية (٦)

إذا كان $\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{ء} = \frac{هـ}{و} = ... = ك$

وكانت $م_1$ ، $م_2$ ، $م_3$ ، ... اعداد حقيقية

فإن $\frac{م_1 ا + م_2 حـ + م_3 هـ}{م_1 ب + م_2 ء + م_3 و} = ك$ (إحدى النسب)

أي أن $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}}$ = إحدى النسب

مثال (٣)

إذا كان $\frac{ا}{٤ س + ص} = \frac{ب}{س - ٤ ص}$

اثبت أن $\frac{ا + ب}{٥ س - ٣ ص} = \frac{ا - ب}{٣ س + ٥ ص}$

الحل

مفتاح الحل بسط النسبة المطلوبة بص لمقام النسبة المطلوبة هتلاقي واحد منهم مجموع المقامات اللي فوق والثاني هو الطرح بتاعهم

∵ $\frac{ا}{٤ س + ص} = \frac{ب}{س - ٤ ص}$

بجمع مقدمات وتوالي النسبتين

∴ $\frac{ا + ب}{٤ س + ص + س - ٤ ص}$ = إحدى النسب

∴ $\frac{ا + ب}{٥ س - ٣ ص}$ = إحدى النسب ← ①

بضرب حدي النسبة الثانية × (-١) وجمع مقدمات وتوالي النسبتين

∴ $\frac{ا - ب}{٤ س + ص - س + ٤ ص}$ = إحدى النسب

∴ $\frac{ا - ب}{٣ س + ٥ ص}$ = إحدى النسب ← ②

من (١) ، (٢) ∴ $\frac{ا + ب}{٥ س - ٣ ص} = \frac{ا - ب}{٣ س + ٥ ص}$

مع الأدهم انت دائماً متفوق
الرياضيات متعة الحياة

مثال (٤)

إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{٢أ+ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{٢ب−جـ}} = \frac{\text{ع}}{\text{٢جـ−أ}}$

فاثبت أن $\frac{\text{٢س+ص}}{\text{٤أ+٤ب−جـ}} = \frac{\text{٢س+٢ص+ع}}{\text{٣أ+٦ب}}$

الحل

بنبسط المطلوب وانت هتعرف

* بضرب حدي النسبة الاولى × (٢) والجمع مع النسبة الثانية

$\text{إحدى النسب} = \frac{\text{٢س+ص}}{\text{٤أ+٢ب+٢ب−جـ}}$

$\text{إحدى النسب} = \frac{\text{٢س+ص}}{\text{٤أ+٤ب−جـ}}$ ← (١)

* بضرب حدي النسبة الاولى × (٢) والثانية × (٢) وجمع مقدمات وتوالي الثلاث نسب

$\text{إحدى النسب} = \frac{\text{٢س+٢ص+ع}}{\text{٤أ+٢ب+٤ب−٢جـ+٢جـ−أ}}$

$\text{إحدى النسب} = \frac{\text{٢س+٢ص+ع}}{\text{٣أ+٦ب}}$ (٢)

∴ من (١)، (٢)

$\frac{\text{٢س+ص}}{\text{٤أ+٤ب−جـ}} = \frac{\text{٢س+٢ص+ع}}{\text{٣أ+٦ب}}$

#

مثال (٥)

إذا كان $\frac{\text{أ+٣ب}}{\text{س+٥ع}} = \frac{\text{٣ب+٥جـ}}{\text{٥ص+٧ع}} = \frac{\text{٥جـ+أ}}{\text{٧ع+س}}$

فاثبت أن $\frac{\text{أ}}{\text{٣ب}} = \frac{\text{س}}{\text{٥ص}}$ يعني $\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{٣ب}}{\text{٥ص}}$

الحل

بضرب حدي النسبة الثانية × (−١) وجمع الثلاث نسب

∴ $\text{إحدى النسب} = \frac{\text{أ+٣ب−٣ب−٥جـ+٥جـ+أ}}{\text{س+٥ع−٥ص−٧ع+٧ع+س}} = \frac{\text{٢أ}}{\text{٢س}} = \frac{\text{أ}}{\text{س}}$ (١)

بضرب حدي النسبة الثالثة × (−١) وجمع النسب المفروضة

∴ $\text{إحدى النسب} = \frac{\text{أ+٣ب+٣ب+٥جـ−٥جـ−أ}}{\text{س+٥ع+٥ص+٧ع−٧ع−س}} = \frac{\text{٦ب}}{\text{١٠ص}} = \frac{\text{٣ب}}{\text{٥ص}}$ (٢)

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{٣ب}}{\text{٥ص}}$ ومنها $\frac{\text{أ}}{\text{٣ب}} = \frac{\text{س}}{\text{٥ص}}$

#

تمرين (١)

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{٢}} = \frac{\text{ب}}{\text{٣}} = \frac{\text{جـ}}{\text{٤}} = \frac{\text{٢أ−ب+٥جـ}}{\text{٣س}}$

فأوجد قيمة س

الحل

الواجب

(١) إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فأثبت أن

① $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{جـ + د}{د}$

② $\frac{٢أ + ٣جـ}{٢ب + ٣د} = \frac{أ - ٢جـ}{ب - ٢د}$

③ $\frac{أ^٢ - جـ^٢}{ب^٢ - د^٢} = \frac{أجـ}{بد}$

④ $\sqrt{\frac{٣أ^٢ - ٥جـ^٢}{٣ب^٢ - ٥د^٢}} = \frac{أ + جـ}{ب + د}$

(٢) إذا كان أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و كميات متناسبة فأثبت أن

① $\frac{أ + ٥جـ}{ب + ٥د} = \frac{جـ - ٣هـ}{د - ٣و}$

② $\sqrt{\frac{٢أ^٢ - ٣جـهـ}{٢ب^٢ - ٣دو}} = \sqrt[٣]{\frac{أجـهـ}{بدو}}$

(٣) أثبت أن أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة إذا كان

① $\frac{أ}{أ - ب} = \frac{جـ}{جـ - د}$ ② $\frac{أ + ب}{أ - ب} = \frac{جـ + د}{جـ - د}$

(٤) إذا كان $\frac{س}{أ - ب + جـ} = \frac{ص}{ب - جـ + أ} = \frac{ع}{جـ - أ + ب}$

اثبت أن $\frac{س + ص}{أ} = \frac{ص + ع}{ب}$

(٥) إذا كان $\frac{أ}{٢س - ص} = \frac{ب}{٢ص - س}$ فأثبت أن

$\frac{٢أ + ب}{أ + ٢ب} = \frac{س}{ص}$

(٦) إذا كان

$\frac{س + ص}{٧} = \frac{ص + ع}{٥} = \frac{ع + س}{٨}$

اثبت أن

$\frac{س + ص + ع}{س - ع} = ٥$

(٧) إذا كان $\frac{أ + ب}{٣} = \frac{ب + جـ}{٦} = \frac{جـ + أ}{٥}$

فاثبت أن

$\frac{أ + ب + جـ}{أ} = ٧$

أكمل العبارات الآتية

① إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{٣}{٧}$

فإن $\frac{أ + جـ}{ب + د} = ---$

② $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = \frac{١}{٣}$

فإن $\frac{أ - ٥جـ + هـ}{ب - ٥د + و} = ---$

③ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = \frac{٢أ + ... - ٣هـ}{.... + ٤د - ....}$

④ $\frac{س}{٢} = ص = \frac{ع}{٦} = \frac{س + ص + ع}{----}$

$= \frac{ع - ص - س}{----}$

التناسب المتسلسل

ملاحظات

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ فإن

① أ ، ب ، جـ فى تناسب متسلسل

الاول المتناسب ، الوسط المتناسب (الوسط الهندسى) ، الثالث المتناسب

② الكميتين أ ، جـ يجب ان يكونا موجبين معاً أو سالبين معاً

③ ∵ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

∴ أ جـ = $ب^2$

$أ = \frac{ب^2}{جـ}$

$جـ = \frac{ب^2}{أ}$

$ب = \pm\sqrt{أ جـ}$

④ إذا كان أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل فإنه

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$ (مثلاً)

∴ جـ = د م

ب = د $م^2$

أ = د $م^3$

ملحوظة

أ ، ب ، جـ فى تناسب متسلسل

أو ب وسطاً متناسباً بين أ ، جـ

نفس المعنى

مثال (١)

أوجد قيمة "س" فى كل مما يلى بحيث تكون الكميات فى تناسب متسلسل

① س ، ٤ ، ٨

الاول = $\frac{\text{مربع الاوسط}}{\text{الثالث}}$

س = $\frac{(٤)^2}{٨} = \frac{١٦}{٨} = ٢$

② ٢ ، ٦ ، س

الثالث = $\frac{\text{مربع الاوسط}}{\text{الاول}}$

= $\frac{(٦)^2}{٢} = \frac{٣٦}{٢} = ١٨$

③ ٣ ، س ، ١٢

الاوسط = $\pm\sqrt{\text{الاول} \times \text{الثالث}}$

= $\pm\sqrt{٣ \times ١٢} = \pm ٦$

تمرين

اوجد قيمة س لكي تكون فى تناسب متسلسل

① ٣ ، س ، ٢٧

② ٦ ، ١٢ ، س

③ $\frac{١}{٥}$ ، س ، ١٢٥

④ ٢ أ ، س ، ٨ أ $ب^2$

⑤ س ، ٦ ، ١٢

⑥ ٢- ، س ، ٨-

⑦ س ، ٦ ، ١٨

⑧ ٩ ، ١٢- ، س

مثال (٢)

إذا كان أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل فأثبت أن

① $\frac{\text{أ}^2+\text{ب}^2}{\text{ب}^2+\text{جـ}^2}=\frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$

الحل

∵ أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}=\text{م}$

∴ $\text{ب}=\text{جـ م}$ ، $\text{أ}=\text{جـ م}^2$

* الطرف الأيمن $=\frac{(\text{جـ م}^2)^2+(\text{جـ م})^2}{(\text{جـ م})^2+\text{جـ}^2}$

$=\frac{\text{جـ}^2\text{م}^4+\text{جـ}^2\text{م}^2}{\text{جـ}^2\text{م}^2+\text{جـ}^2}=\frac{\text{جـ}^2\text{م}^2(\text{م}^2+1)}{\text{جـ}^2(\text{م}^2+1)}$

$=\text{م}^2$ ← ①

* الطرف الأيسر $=\frac{\text{جـ م}^2}{\text{جـ}}=\text{م}^2$

∴ الطرفان متساويان

② $\frac{\text{أ}^2+\text{أب}+\text{ب}^2}{\text{ب}^2+\text{ب جـ}+\text{جـ}^2}=\frac{\text{أ}^2-\text{ب}^2}{\text{ب}^2-\text{جـ}^2}$

الحل

مثال (٣)

إذا كان أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فأثبت أن

$\frac{\text{أ}-\text{د}}{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}=\frac{\text{أ}-2\text{ب}+\text{جـ}}{\text{أ}-\text{ب}}$

الحل

∵ أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}=\frac{\text{جـ}}{\text{د}}=\text{م}$ (فرضاً)

∴ $\text{جـ}=\text{د م}$ ، $\text{ب}=\text{د م}^2$ ، $\text{أ}=\text{د م}^3$

الطرف الأيمن $=\frac{\text{د م}^3-\text{د}}{\text{د م}^3+\text{د م}^2+\text{د م}}$

$=\frac{\text{د}(\text{م}^3-1)}{\text{د م}(\text{م}^2+\text{م}+1)}=\frac{\text{د}(\text{م}-1)(\text{م}^2+\text{م}+1)}{\text{د م}(\text{م}^2+\text{م}+1)}$

$=\frac{\text{م}-1}{\text{م}}$ ← ①

الطرف الأيسر $=\frac{\text{د م}^3-2\text{د م}^2+\text{د م}}{\text{د م}^3-\text{د م}^2}$

$=\frac{\text{د م}(\text{م}^2-2\text{م}+1)}{\text{د م}^2(\text{م}-1)}=\frac{\text{د م}(\text{م}-1)^2}{\text{د م}^2(\text{م}-1)}$

$=\frac{\text{م}-1}{\text{م}}$ ← ②

من ① ، ② ∴ الطرفان متساويان

مثال (٤)

إذا كان ب وسطاً متناسباً بين أ ، جـ وكانت د وسطاً متناسباً بين ب ، م فأثبت أن

$$\frac{أ^2}{ب^2} + \frac{ب^2}{د^2} + \frac{جـ^2}{م^2} = \frac{أ}{جـ} + \frac{ب}{م} + \frac{ك}{م^2}$$

الحل

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{م} = ك$ فرضاً

جـ = م ك ، ب = م ك² ، أ = م ك³

الطرف الأيمن =

الطرف الأيسر =

الواجب

(١) أوجد الأول المتناسب لكل من

(١) ٤ ، ٨ (٢) أ س ، أ ص²

(٢) أوجد الثالث المتناسب لكل من

(١) ٦ ، ١٢ (٢) س² ، ٦ س² ص³

(٣) أوجد الوسط المتناسب لكل من

(١) ٣ ، ٢٧ (٢) ١ ، ٩

(٣) ٨ س² ، ٢ ص² (٤) -٢ ، -١٨

(٥) ٢ ، ٥٠ (٦) -٤ ، -٩

(٤) إذا كان ب وسطاً متناسباً بين أ ، جـ (أ ، ب ، جـ) في تناسب متسلسل فأثبت أن

(١) $\frac{أ - ب}{ب - جـ} = \frac{أ + ٣ ب}{ب + ٣ جـ}$

(٢) $\left(\frac{ب - جـ}{أ - ب}\right)^2 = \frac{جـ}{أ}$

(٣) $\frac{أ^3 - ٤ ب^3}{ب^3 - ٤ جـ^3} = \frac{ب^3}{جـ^3}$

(٤) $\frac{٢أ^2 - ٣ ب^2}{٢ب^2 - ٣ أ^2} = \frac{جـ}{أ} = \frac{جـ^2}{ب^2}$

(٥) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فأثبت أن

(١) $\frac{أ - ٢ب}{ب - ٢جـ} = \frac{٣ب + ٤جـ}{٣جـ + ٤د}$

(٢) $\left(\frac{أ + ب}{ب + جـ}\right)^2 = \frac{أ}{٢جـ} + \frac{ب}{٢د}$

(٣) $\frac{أ ب - جـ د}{ب^2 - جـ^2} = \frac{أ + جـ}{ب}$

(٤) $\frac{٢أ^3 + ٣ب^3}{٣أ^3 - ٤ب^3} = \frac{٢أ + ٣د}{٣أ - ٤د}$

(٦) إذا كان س ، ٣ ، ٩ ، ص في تناسب متسلسل فأوجد قيمة س ، ص

(٧) إذا كان ٢ ، س + ٤ ، ١٨ كميات متناسبة فأوجد قيمة س

(٨) أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد ١ ، ٥ ، ١٣ فإنها تصبح متناسبة

٣ ـ التغير الطردى

شوية ملاحظات زى الفل

١- يقال أن ص تتغير طردياً مع س
وتكتب ص ∝ س إذا كان

أو

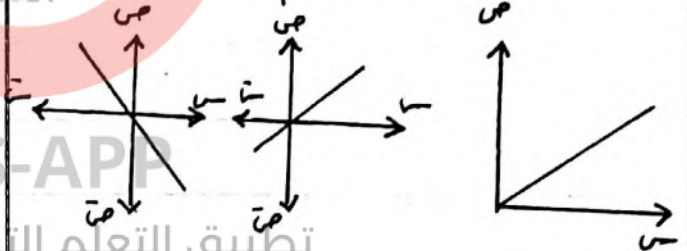
ص = م س
ص/س = م

← (ص = ثابت × س)
(ص/س = ثابت)

حيث م (ثابت حقيقى لا يساوى الصفر)

٢- فى حالة التغير الطردى بين كميتين يكون

ص١/ص٢ = س١/س٢ والعكس صحيح

٣- التمثيل البيانى للعلاقة الطردية
عبارة عن خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠،٠)

لذلك (أى مستقيم لا يمر بنقطة الأصل
لا يمثل تغير طردى)

مثال (١)

إذا كان ص ∝ س وكانت
ص = ١٥ عندما س = ٣
أوجد

① العلاقة بين س، ص

الحل

∵ ص ∝ س ∴ ص = م س
، ص = ١٥ عندما س = ٣
١٥ = م × ٣ ∴ م = ١٥/٣ = ٥
∴ العلاقة هى ص = ٥ س

② أوجد قيمة ص عندما س = ٧
ص = ٥ س
ص = ٥ × ٧ = ٣٥

③ قيمة س عندما ص = ٩٠
ص = ٥ س
٩٠ = ٥ س
س = ٩٠/٥ = ١٨

تمرين (١)

إذا كان ص ∝ س وكانت ص = ١٢ عندما س = ٣ فأوجد

① العلاقة بين س، ص

② قيمة ص عندما س = ٩

③ قيمة س عندما ص = ٦

مثال (٢)

إذا كان ص ∝ $\sqrt[3]{س}$

وكانت ص = $\frac{٢}{٣}$ عندما س = ٨

أوجد قيمة س عندما ص = ١

الحل

∵ ص ∝ $\sqrt[3]{س}$

∴ $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{\sqrt[3]{س_1}}{\sqrt[3]{س_2}}$

ص₁ = $\frac{٢}{٣}$ ، س₁ = ٨

ص₂ = ١ ، س₂ = ؟؟

∴ $\frac{(\frac{٢}{٣})}{١} = \frac{\sqrt[3]{٨}}{\sqrt[3]{س_2}}$

∴ $\frac{٢}{٣} = \frac{٢}{\sqrt[3]{س_2}}$

$٢\sqrt[3]{س_2} = ٦$

$\sqrt[3]{س_2} = ٣$ بتكعيب الطرفين

∴ $س_2 = (٣)^3 = ٢٧$

تمرين (٢)

إذا كان ص ∝ $\sqrt{س}$ وكانت ص = ١٠ عندما س = ٤ أوجد

① العلاقة بين س و ص

② قيمة ص عندما س = ٣٦

③ قيمة س عندما ص = ١٥

مثال (٣)

إذا كان $\frac{٢١س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع}$

اثبت أن ص ∝ ع

الحل

∵ $\frac{٢١س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع}$

∴ ص(٧س − ع) = ع(٢١س − ص)

٧س ص − ص ع = ٢١س ع − ص ع

∴ ٧س ص = ٢١س ع

بالقسمة على ٧س

ص = ٣ع

∴ $\frac{ص}{ع} = ٣$ (ثابت)

∴ ص ∝ ع

> لإثبات أن ص ∝ ع نثبت أنه $\frac{ص}{ع}$ = ثابت أو ص = ثابت × ع

تمرين (٣)

إذا كان ٤س² + ٩ص² = ١٢س ص فأثبت أن س ∝ ص

الحل

لاحظ ص ∝ س ∴ ص = م س

أما س ∝ ص ∴ س = م ص

٤ ـ التغير العكسى

شوية ملاحظات كويسين

① يقال أن ص تتغير عكسياً مع س وتكتب ص ∝ $\frac{1}{س}$.

إذا كان $ص = \frac{م}{س}$ ← $\frac{ثابت}{س}$

أو $ص س = م$ ← ص س = ثابت ← تستخدم لإثبات التناسب العكسى

ويكون $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$

مثال (١)

إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س وكانت ص = ٦ عندما س = ٢,٥ فأوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٥

الحل

∵ ص ∝ $\frac{1}{س}$ ∴ س ص = م

∵ ص = ٦ ، عندما س = ٢,٥

∴ م = ٦ × ٢,٥ = ١٥

∴ العلاقة هى $س ص = ١٥$

عندما س = ٥

∴ ٥ ص = ١٥ ∴ ص = $\frac{١٥}{٥}$ = ٣

ماهو الشئ الذى يظل حاراً حتى لو وضع فى الثلاجه ؟

تمرين (١)

إذا كان ص ∝ $\frac{1}{س}$ وكانت ص = ٤ عندما س = ٦ فأوجد

① العلاقة بين س ، ص

② قيمة ص عندما س = ٣

③ قيمة س عندما ص = ٢

الحل

مثال (٢)

إذا كان $ص^2 ∝ \frac{1}{س^3}$ وكانت ص = $\frac{1}{٣}$ عندما س = ٣ أوجد ← $ص^2 = \frac{م}{س^3}$

① العلاقه بين ص ، س

الحل

∵ $ص^2 ∝ \frac{1}{س^3}$ ∴ $ص^2 س^3 = م$

∵ ص = $\frac{1}{٣}$ ، س = ٣

∴ م = $(\frac{1}{٣})^2 × (٣)^3 = \frac{1}{٩} × ٢٧ = \frac{٢٧}{٩}$

م = $\frac{٢٧}{٩}$ = ٣

∴ العلاقه هى $ص^2 = \frac{٣}{س^3}$

② عندما $ص = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{3}{س^3}$

$\frac{8}{9} = \frac{3}{س^3}$

$\therefore س^3 = \frac{3 \times 9}{8} = \frac{27}{8}$

بأخذ $\sqrt[3]{}$ $\therefore س = \frac{3}{2}$

تمرين (٢)

إذا كان $ص = م + ٥$ حيث $م \propto \frac{1}{س^2}$

وكانت $ص = ٩$ عندما $س = ٢$

أوجد ① العلاقة بين ص ، س

② قيمة س عندما $ص = ٦$

الحل

$\therefore م \propto \frac{1}{س^2}$ $\therefore م = \frac{م}{س^2}$

$\therefore ص = \frac{م}{س^2} + ٥$ ((أكمل))

مثال (٣)

إذا كان $س^4 ص^2 - ١٤ س^2 ص + ٤٩ = ٠$

فأثبت أن $ص \propto \frac{1}{س^2}$

الحل

$\because س^4 ص^2 - ١٤ س^2 ص + ٤٩ = ٠$

$\therefore (س^2 ص - ٧)(س^2 ص - ٧) = ٠$

$\therefore س^2 ص - ٧ = ٠$

$\therefore س^2 ص = ٧$ (ثابت)

$\therefore ص \propto \frac{1}{س^2}$

لإثبات أن $ص \propto \frac{1}{س^2}$ نثبت أن $ص \times س^2 =$ ثابت

تمرين (٣)

إذا كان $س^6 ص^2 = ٣ س^3 ص + ٤ ص^2$

اثبت أن $ص \propto س^{-3}$

معناها $ص \propto \frac{1}{س^3}$

مثال (٤)

إذا كانت $ص \propto \frac{1}{\sqrt[3]{س}}$ وكانت

$ص = ٥$ عندما $س = ٨$

فأوجد قيمة س عندما $ص = ٢$

الحل

$\because ص \propto \frac{1}{\sqrt[3]{س}}$

$\therefore \frac{ص_1}{ص_2} = \frac{\sqrt[3]{س_2}}{\sqrt[3]{س_1}}$

$\frac{٥}{٢} = \frac{\sqrt[3]{س_2}}{\sqrt[3]{٨}} \Leftarrow \frac{\sqrt[3]{س_2}}{٢}$

$\frac{٥}{٢} = \frac{\sqrt[3]{س_2}}{٢}$ $\therefore \sqrt[3]{س_2} = ٥$

$\therefore س_2 = ١٢٥$

تمارين على التغير الطردي والعكسي

(١) إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢ أوجد

(١) العلاقة بين ص ، س

(٢) قيمة ص عندما س = ٦٠

(٢) إذا كانت ص ∝ $\frac{1}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢ فأوجد

(١) العلاقة بين س ، ص

(٢) قيمة ص عندما س = ٠,٥

(٣) إذا كانت ص ∝ المقلوب الضربي للمقدار $\frac{1}{س^2}$ وكان ص = ٣ عندما س = ٣ فأوجد

(١) العلاقة بين س ، ص

(٢) قيمة ص عندما س = ٩

(٤) إذا كانت ص ∝ $\frac{1}{\sqrt{س}}$ وكانت ص = ٢ عندما س = ١٦ فأوجد قيمة ص عندما س = ٣٢

(٥) إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٢٠ عندما س = ٧ فأوجد قيمة س عندما ص = ٤٠

(٦) إذا كانت ص² ∝ س³ أوجد العلاقة بين س ، ص إذا كانت ص = ٣ عندما س = ٢

(٧) إذا كان $\frac{أ+ب}{٣} = \frac{٢ب+جـ}{٦}$ فأثبت أن جـ ∝ أ

(٨) س² ص² − ٦ س ص + ٩ = ٠ فأثبت أن ص تتغير عكسياً مع س

(٩) إذا كان $\frac{٢١س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع}$ فأثبت أن ص ∝ ع

(١٠) إذا كان س⁴ ص² − ١٤ س² ص + ٤٩ = ٠ فأثبت أن ص ∝ $\frac{1}{س^2}$

(١١) وضح أي من الأشكال الآتية تمثل تغير طردي بين س ، ص ...

(أ) (ب) (جـ) (د)

(١٢) إذا كان ص ∝ س فإن $\frac{س_1}{س_2}$ = ...

(١٣) إذا كان ص ∝ $\frac{1}{س}$ فإن $\frac{ص_1}{ص_2}$ = ...

(١٤) إذا كان ص = $\frac{٣}{٥}$ س فإن ص ∝ ...

(١٥) إذا كان س ص = ٥ فإن س ∝ ...

(١٦) إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٢ عندما س = ٨ فإن ص = ... عندما س = ١٢

(١٧) إذا كانت ص ∝ $\frac{1}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢٠ فإن ص = ... عندما ص = ١٢ .

١ - جمع البيانات

جزء نظري شويه معلش

مصادر جمع البيانات

(١) مصادر أوليه (ميدانيه)

هى المصادر التى يبحث منها الباحث على البيانات بشكل مباشر

أمثله • المقابله الشخصيه • استطلاعات الرأى • الملاحظه والقياس

(٢) مصادر ثانويه (تاريخيه)

هى المصادر التى يحصل منها الباحث على البيانات التى تم تجميعها من قبل

أمثله • نشرات الجهاز المركزى للإحصاء
• قائمة بيانات الموظفين من الشركات
• وسائل الاعلام ومواقع الانترنت

أساليب جمع البيانات

(١) أسلوب الحصر الشامل

(٢) أسلوب العينات

أنواع العينات

- الاختيار المتحيز
- الاختيار العشوائي
  - عينه عشوائيه بسيطه
  - عينه عشوائيه طبقيه

عدد مفردات الطبقه فى العينه

$$= \frac{\text{عدد مفردات الطبقه ككل}}{\text{عدد مفردات المجتمع الكلى}} \times \text{عدد مفردات العينه}$$

استراحه

A ل

A

خ

د

استخرج من الصورة

(١) اسم الشخص

(٢) اسم زوجته

(٣) وظيفته

(٤) اسم دولته

٢ ـ التشتت

تذكر أن

١) الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$

٢) المنوال هو القيمة الأكثر شيوعاً (تكراراً) بين القيم.

٣) الوسيط هو القيمة التى تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبهم تصاعدياً أو تنازلياً

٤) التشتت لمجموعة من القيم هو مقياس درجة تباعد هذه القيم وهو يعبر عن مدى تجانس المجموعات.

مقاييس التشتت

أ) المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة

ب) الانحراف المعيارى «σ» وهو أهم وأدق مقاييس التشتت

أولاً: الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مج}(س - \bar{س})^2}{ن}}$$

حيث

$\bar{س}$ (س بار) هو الوسط الحسابى للمفردات

ن عدد المفردات

مج مجموع

مثال (١)

احسب الانحراف المعيارى لمجموعة القيم ٨ ، ٩ ، ٧ ، ٦ ، ٥

الحل

١) نوجد الوسط الحسابى ($\bar{س}$)

$$\frac{\text{مج } س}{ن} = \frac{٥+٦+٧+٩+٨}{٥} = ٧$$

٢) نكون الجدول التالى

س	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^2$
٨	٨ − ٧ = ١	١
٩	٩ − ٧ = ٢	٤
٧	٧ − ٧ = ٠	٠
٦	٦ − ٧ = −١	١
٥	٥ − ٧ = −٢	٤
المجموع		١٠

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مج}(س - \bar{س})^2}{ن}} = \sqrt{\frac{١٠}{٥}}$$

≈ ١٫٤١

تمرين (١)

احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لكل من القيم التالية

١) ١٦ ، ٣٢ ، ٥٠ ، ٢٠ ، ٢٧

٢) ٧٢ ، ٥٣ ، ٦١ ، ٧٠ ، ٥٩

٣) ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩

ثانياً حساب الانحراف المعيارى للتوزيع تكرارى

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^2 \times ك}{\text{مجـ } ك}}$$

مجـ ك = مجموع التكرارات

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ}(س \times ك)}{\text{مجـ } ك}$$

(1) حساب σ لتوزيع تكرارى بسيط

مثال (2)

من الجدول التالى أوجد الانحراف المعيارى

العمر	15	20	22	23	25	30	المجموع
عدد الأشخاص	2	3	5	5	1	4	20

(1) نوجد الوسط الحسابى $\bar{س}$

العمر (س)	ك	س × ك
15	2	30
20	3	60
22	5	110
23	5	115
25	1	25
30	4	120
المجموع	20	460

$\bar{س} = \frac{\text{مجـ}(س \times ك)}{\text{مجـ } ك} = \frac{460}{20} = 23$ سنة

(2)

س	ك	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^2$	$(س - \bar{س})^2 \times ك$
15	2	$15 - 23 = -8$	64	128
20	3	-3	9	27
22	5	-1	1	5
23	5	0	0	0
25	1	2	4	4
30	4	7	49	196
المجموع	20			360

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^2 \times ك}{\text{مجـ } ك}} = \sqrt{\frac{360}{20}}$$

$= \sqrt{18} \simeq 4.24$ سنة

تمرين (1)

من الجدول التالى أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى

عدد أيام الغياب	0	1	2	3	4	المجموع
عدد الطلاب	5	7	7	5	6	30

مثال (2)

أوجد الانحراف المعيارى للتوزيع ذى المجموعات لعدد 100 عامل

الحوافز بالجنيه	35-	45-	55-	65-	75-	85-
عدد العمال	10	14	20	28	20	8

(1) نوجد الوسط الحسابى $\bar{س}$ من الجدول التالى

المجموعات	مركز المجموعة (س)	ك	س × ك
35-	40	10	400
45-	50	14	700
55-	60	20	1200
65-	70	28	1960
75-	80	20	1600
85-	90	8	720
المجموع		100	6580

$\bar{س} = \frac{\text{مجـ}(س \times ك)}{\text{مجـ } ك} = \frac{6580}{100} = 65.8$ جنيه

أكمل الجدول التالى

ملاحظات هامة

١) الانحراف المعيارى هو الأكثر تعبيراً عن مقدار تشتت المجموعة وأكثرها دقة.

٢) المدى هو أبسط مقاييس التشتت

٣) القيم الأكثر تجانساً تكون أقل تشتتاً ويكون الانحراف المعيارى لها أصغر

٤) إذا كان σ = ٠ فمعنى ذلك أن كل قيم المفردات متساوية وهى حالة التجانس التام (التشتت المنعدم)

الواجب

١) احسب الانحراف المعيارى لكل من

① ٧ ، ٨ ، ٦ ، ٩ ، ١٠ ، ٦ ، ١١

② ٢٢ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ١٨

③ ٥ ، ٦ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩

٢) من كل من الجداول الآتية أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى

①

عدد الأطفال	٠	١	٢	٣	٤
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

②

عدد الوحدات	٠	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

③

المجموعات	٠-	٤-	٨-	١٢-	١٦-٢٠	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

٣ أكمل

١) من مقاييس التشتت .... ، ....

٢) أبسط مقاييس التشتت هو ....

٣) أدق مقاييس التشتت هو ....

٤) الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة ....

٥) لأى مجموعة من القيم إذا تساوت جميع المفردات فإن التشتت يساوى ....

٦) إذا كان الانحراف المعيارى لمجموعة قيم = ٣ فإن مجـ (س - س̄)² لهذه القيم هو ....

٧) الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى هو ....

٨) الوسط الحسابى للقيم ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩ هو ....

٩) القيمة الأكثر تكراراً لمجموعة من البيانات هو ....

١٠) المدى للمجموعة ٣٢ ، ٢٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ١٧ هو ....

١١) مجموع قيم المفردات ÷ عدد هذه المفردات = ...

إنتهى المنهج مع أطيب تمنياتى للطلبة بالنجاح والتفوق

م/ محمد أدهم

ثانيا
حساب المثلثات و الهندسة
الصف الثالث الإعدادى
الترم الاول
إعداد
أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

ثانياً : حساب المثلثات والهندسة

١ – النسب المثلثية الاساسية للزاوية الحادة

خليك فاكر

(١) ١° = ٦٠َ ، ١َ = ٦٠ً

∴ ١° = ٦٠ × ٦٠ = ٣٦٠٠ً

يستخدم المفتاح [°'''] لكتابة الزاوية بالدرجات والدقائق والثواني

(٢) مجموع قياسي الزاويتين المتتامتين = ٩٠°

(٣) مجموع قياسي الزاويتين المتكاملتين = ١٨٠°

(٤) مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

مثال (١)

(١) إذا كان النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين ٧ : ٩ فاوجد قياسهما

الحل

نفرض أن قياسي الزاويتين ٧ س ، ٩ س

∴ ٧ س + ٩ س = ٩٠°

١٦ س = ٩٠°

س = ٩٠° / ١٦ = ٥,٦٢٥°

∴ قياس الاولى = ٧ × ٥,٦٢٥° = ٣٩° ٢٢َ ٣٠ً

قياس الثانية = ٩ × ٥,٦٢٥° = ٥٠° ٣٧َ ٣٠ً

(٢) إذا كان النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين ٢ : ٣ فاوجد قياس كل منهما

((حل انت))

مثال (٢)

إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين ٣ : ٥ فاوجد القياس الستيني لكل منهما

الحل

نفرض أن قياسي الزاويتين ٣ س ، ٥ س

∴ ٣ س + ٥ س = ١٨٠°

∴ ٨ س = ١٨٠°

∴ س = ١٨٠° / ٨ = ٢٢,٥°

∴ قياس الاولى = ٣ × ٢٢,٥° = ٦٧° ٣٠َ

قياس الثانية = ٥ × ٢٢,٥° = ١١٢° ٣٠َ

تمرين (٢)

إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة للمثلث ٣ : ٤ : ٧ فاوجد القياس الستيني لكل منهما

الحل

٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

أ/ محمد أدهم

النسب المثلثية للزاوية الحادة

هى نسبة بين طولى ضلعين من أضلاع المثلث القائم الذى تقع فيه الزاوية.

جا ج = المقابل / الوتر (sin)

جتا ج = المجاور / الوتر (cos)

ظا ج = جا ج / جتا ج = المقابل / المجاور (tan)

مثال (١)

من الشكل المقابل أوجد النسب المثلثية للزاويتين أ ، ج

جا أ = ٣/٥ ، جا ج = ٤/٥

جتا أ = ٤/٥ ، جتا ج = ٣/٥

ظا أ = ٣/٤ ، ظا ج = ٤/٣

تمرين

جا س = ، جا ع =

جتا س = ، جتا ع =

ظا س = ، ظا ع =

ملاحظات هامة

١ * إذا كان ق(أ) + ق(ج) = ٩٠° فإن جا أ = جتا ج ، جتا أ = جا ج والعكس صحيح

٢ * الوتر دائماً ثابت لانه مقابل للقائمة لكن المقابل والمجاور يتغير بتغير الزاوية

٣ * نظرية فيثاغورث

(الوتر)² = (المقابل)² + (المجاور)²

مربع الوتر = مجموع المربعين الآخرين

٤ * **نظرية اقليدس**

(أب)² = ب د × ب ج

(أج)² = ج د × ج ب

(أد)² = د ب × د ج

أ د × ب ج = أ ب × أ ج

توضيح فيثاغورث

* لو الوتر مطلوب ربع واجمع
* لو الوتر موجود ربع واطرح

(أج)² = (أب)² + (ب ج)²

(أب)² = (أج)² − (ب ج)²

(ب ج)² = (أج)² − (أب)²

أ/ محمد أدهم

٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

مثال (٢)

أ ب جـ مثلث فيه ق ($\hat{أ}$) = ٩٠°

أ جـ = ١٥ سم ، أ ب = ٢٠ سم

اثبت أن جا جـ جتا ب ـ جا جـ جا ب يساوى صفر

الحل

(أ جـ = ١٥ سم ، أ ب = ٢٠ سم ، ب جـ = ٢٥ سم الوتر)

من فيثاغورث

∴ (ب جـ)^2 = (١٥)^2 + (٢٠)^2

(ب جـ)^2 = ٦٢٥

∴ ب جـ = ٢٥ سم

جا جـ = $\frac{٢٠}{٢٥}$ جا ب = $\frac{١٥}{٢٥}$

جتا جـ = $\frac{١٥}{٢٥}$ جتا ب = $\frac{٢٠}{٢٥}$

∴ جتا جـ جتا ب ـ جا جـ جا ب

$\frac{١٥}{٢٥} \times \frac{٢٠}{٢٥} - \frac{٢٠}{٢٥} \times \frac{١٥}{٢٥}$ = صفر

مثال (٣)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب

فإذا كان أ ب : أ جـ = ٣ : ٥

فأوجد النسب المثلثية للزاوية أ

الحل

(أ ب = ٣ ، ب جـ = ٤ ، أ جـ = ٥ الوتر)

نفرض أن أ ب = ٣ وحدة طول

، أ جـ = ٥ وحدة طول

∴ من فيثاغورث ب جـ = ٤ وحدة طول

جا (أ) = جا (جـ) =

جتا (أ) = جتا (جـ) =

ظا (أ) = ظا (جـ) =

تمرين

فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث قائم فى ب

أ ب = ٦ سم

، ظا جـ = $\frac{٣}{٤}$ ⟵ ($\frac{٦}{٨}$)

(أ ب = ٦ سم)

أوجد

① طول $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أ جـ}$

② جا أ + جتا أ

مثال (٤)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب

، جا أ = ٠,٦

أوجد قيمة جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ

الحل

∴ جا أ = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$

∴ $\frac{ب جـ}{أ جـ}$ = $\frac{٣}{٥}$ ⟵ وحدات ⟵ وحدات

من فيثاغورث

∴ أ ب = ٤ وحدات

∴ جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ

= $\frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥} = ١$

قتلة قتيلة وبعد ألف يوم ظهرت آثار على الجريمة المطلوب

① اسم القاتل ② اسم القتيلة

③ مكان الجريمة ④ رقم السيارة

الواجب

(١) إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين ٣ : ٤ فأوجد قياس كل منهما بالقياس الستيني

(٢) إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين ٢ : ٥ فأوجد قياس كل منهما بالقياس الستيني

(٣) إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة للمثلث ٢ : ٣ : ٤ فأوجد قياس كل منها.

(٤) في الشكل المقابل
أوجد طول أجـ
ثم أوجد النسب المثلثية للزاويتين أ ، جـ

(٥) في الشكل المقابل
أوجد طول ب جـ
ثم أوجد قيمة
جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ

(٦) في الشكل المقابل
أوجد قيمة
٣ ظا جـ + ٤ جا ب

(فكرة الحل) ← حيث أد من فيثاغورث ونكمل المثلث الأول والثاني يجيب ب د من فيثاغورث ونكمل المطلوب

(٧) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب
فإذا كان أب : أجـ = $\frac{٦}{١٠}$
فأوجد النسب المثلثية للزاوية أ

(٨) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب
فإذا كان ٢ أب = $\sqrt{٣}$ أجـ
فأوجد النسب المثلثية للزاوية جـ

(٩) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ع
، س ع = ٧ سم ، س ص = ٢٥ سم
أوجد قيمة (١) ظا س × ظا ص
(٢) جا س + جا ص
(٣) جا س + جتا س

(١٠) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب
، ٧ ظا أ − ٢٤ = ٠
فأوجد قيمة ١ − ظا أ جا جـ

(١١) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب
فإذا كان ٥ جا أ − ٣ = ٠ فأوجد
النسب المثلثية للزاوية جـ ، أ

(١٢) أكمل

(١) جا أ = ... جتا أ = ... ظا أ = ...

(٢) لأي زاويتين حادتين أ ، ب إذا كان
جا أ = جتا ب فإن ق(أ) + ق(ب) = ----

(٣) إذا كان أ ، ب زاويتين حادتين وكان
جا ب = جتا أ فإن ق(أ) = --- حيث ق(ب) = ٤٠°

(٤) في △ أ ب جـ القائم الزاوية في ب يكون
جا أ + جتا جـ = ---- (الحل: ٢ جا أ أو ٢ جتا جـ)

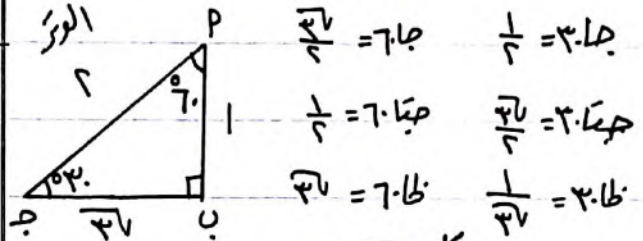
٢ ـ النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

أولاً: النسب المثلثية للزاويتين (٣٠°، ٦٠°)

جا٣٠ = $\frac{١}{٢}$ ، جا٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا٦٠ = $\frac{١}{٢}$

ظا٣٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ظا٦٠ = $\sqrt{٣}$

النسب المثلثية \ قياس الزاوية	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا (sin)	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
جتا (cos)	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظا (tan)	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$	١

احفظ دى

إذا كانت النسبة بين الزاويتين ١ : ٢ فإنهم ٣٠°، ٦٠°

١) طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° فى المثلث القائم = $\frac{١}{٢}$ (نصف) طول الوتر

٢) طول الضلع المقابل للزاوية ٦٠° فى المثلث القائم = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × طول الوتر

٣) النسبة بين أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية متساوى الساقين ١ : ١ : $\sqrt{٢}$

ثانياً: النسب المثلثية للزاوية (٤٥°)

جا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ← ($\frac{\sqrt{٢}}{٢}$)

جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ← ($\frac{\sqrt{٢}}{٢}$)

ظا ٤٥° = ١

أكمل

إذا كان جا س = جتا س

فإن س = ٤٥°

مثال (١)

بدون استخدام الآلة أوجد قيمة

١) جا٣٠° جتا٦٠° + جتا²٣٠° + ٥ظا٤٥° − ١٠ جتا²٤٥°

الحل

$\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ + ٥ \times ١ - ١٠ \times (\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢$

$= \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} + ٥ - \frac{١٠}{٢} = ١$

٢) جتا٦٠° + جا٣٠° − ظا ٤٥°

الحل

٣) ٢ جا٣٠° + ٤ جتا٦٠° − ظا²٦٠°

الحل

مثال (٢)

اثبت أن

١) $\sin 60° = 2 \sin 30° \cos 30°$

الحل

الطرف الايمن = $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الطرف الايسر = $2 \sin 30° \cos 30°$

$= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ الطرفان متساويان

٢) $\cos 60° = 2 \cos^2 30° - 1$

الحل

مثال (٣)

أوجد قيمة س التى تحقق أن

١) $س \sin 30° \cos^2 45° = \cos^2 30°$

الحل

$س \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$س \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$س \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ∴ $س = \frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$

$س = \frac{3}{4} \times \frac{4}{1} = 3$

٢) $س \cos 30° = \tan 60°$

(حل انت)

إيجاد قياس الزاوية إذا علمت احدى نسبها المثلثية

مثال (١)

أوجد قيمة هـ فى كل مما يأتى حيث هـ زاوية حادة

١) $\sin هـ = 0.8$

shift sin 0 . 8 = ° ' ''

∴ هـ ≃ 53° 7' 48''

٢) $\sin هـ = 0.6$

٣) $\cos هـ = 0.7152$

shift cos 0 . 7 1 5 2 = ° ' ''

هـ ≃ 44° 20' 25''

٤) $\cos هـ = 0.3824$

٥) $\tan هـ = 1.0156$

shift tan 1 . 0 1 5 6 = ° ' ''

∴ هـ ≃ 45° 26' 59''

٦) $\tan هـ = 1$

الواجب

① بدون استخدام الآلة أثبت أن

① جتا ٦٠° = ٢ جتا² ٣٠° − ١

② ٢ جتا² ٣٠° − ١ = ١ − ٢ جا² ٣٠°

③ جتا ٦٠° = جتا² ٣٠° − جا² ٣٠°

④ جتا² ٦٠° = ٥ جا² ٣٠° − ظا² ٤٥°

⑤ ظا ٦٠° = ٢ ظا ٣٠° / (١ − ظا² ٣٠°)

---

② أوجد قيمة س التي تحقق أن

① س جا² ٤٥° = ظا² ٦٠°

② س جا ٣٠° جتا² ٤٥° = جا² ٦٠°

③ س جا ٤٥° جتا ٤٥° ظا ٦٠° = ظا² ٤٥° − جتا² ٦٠°

④ ٤ س = جتا² ٣٠° ظا² ٣٠° ظا² ٤٥°

⑤ ظا س = ٤ جا ٣٠° جتا ٦٠°

⑥ ٢ جا س = جا ٤٥° جتا ٤٥° + جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا² ٣٠°

---

③ أوجد قيمة هـ حيث هـ زاوية حادة

① جا هـ = ٠,٦٥

② جا² ٤٥° = جتا هـ ظا ٣٠°

③ جا هـ جا² ٦٠° = ٣ جا² ٤٥° جتا² ٤٥° جتا ٦٠°

④ ٣ ظا هـ − ٤ جا² ٣٠° = ٨ جتا² ٦٠°

⑤ جا هـ = جتا ٦٠°

---

④ إذا كان ظا س = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ حيث س حادة

فأوجد قيمة جا س ظا (٣س/٢) + جتا (٢س)

---

⑤ فى الشكل المقابل

أ ب جـ د شبه منحرف متساوى الساقين

أب = أد = دجـ = ٥ سم

ب جـ = ١١ سم

أوجد ① ق(∠ب) ، ق(∠أ)

② مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د

---

⑥ فى الشكل المقابل

ق(∠أ) = ٢ ق(∠جـ)

أوجد قيمة المقدار

جتا² أ + ظا² جـ

---

⑦

كسرت الرياح الجزء العلوى من شجرة فصنع مع الارض زاوية قياسها ٦٠° ، إذا كانت نقطة تلاقى قمة الشجرة بالارض تبعد عن قاعدة الشجرة مسافة ٤ أمتار أوجد طول الشجرة لأقرب متر.

---

⑧ أكمل

① جا ٤٥° − جتا² ٤٥° = ---

② جتا ٦٠° + جا ٣٠° = ---

③ جا ٣٠° + جتا ٦٠° − ظا ٤٥° = ---

④ ٤ جتا ٣٠° × ظا ٦٠° = ---

⑤ ظا ٤٥° × جا ٣٠° = ---

⑥ كم عدد محافظات جمهورية مصر العربية

١ - البعد بين نقطتين

ملاحظات هامة جداً

١ البعد بين نقطتين (س١، ص١) ، (س٢، ص٢)

= √(مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات)

$$= \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$$

٢ بعد نقطة عن محور السينات = |ص|

بعد النقطة عن محور الصادات = |س|

٣ لإثبات أن ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة نحسب البعد بين كل نقطتين ثم نثبت أن أكبر بعد = مجموع البعدين الآخرين

٤ فى أى مثلث أ ب جـ لتحديد نوع المثلث نوجد أ ب ، ب جـ ، أ جـ

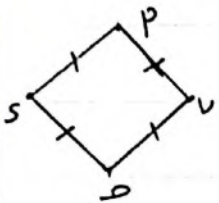
أ) $(أجـ)^2 > (أب)^2 + (ب جـ)^2$ منفرج فى ب

ب) $(أجـ)^2 = (أب)^2 + (ب جـ)^2$ قائم فى ب

جـ) $(أجـ)^2 < (أب)^2 + (ب جـ)^2$ حاد الزوايا

٥ إذا كان أ ب جـ د شكل رباعى

أ) لإثبات أن الشكل متوازى أضلاع: أ ب = جـ د ، أ د = ب جـ

ب) لإثبات أن الشكل مستطيل: أ ب = جـ د ، أ د = ب جـ ، أ جـ = ب د (القطران)

جـ) لإثبات أنه شكل معين: أ ب = ب جـ = جـ د = د أ (الأضلاع الأربعة متساوية)

د) لإثبات أنه الشكل مربع: أ ب = ب جـ = جـ د = د أ (الأضلاع =) ، أ جـ = ب د (القطران =)

٦ لإثبات أن ثلاث نقط أ ، ب ، جـ تقع على محيط دائرة مركزها م

نثبت م أ = م ب = م جـ (نق)

* محيط الدائرة = ٢ π نق
* مساحة الدائرة = π نق²

٧ بعد النقطة م (س، ص) عن نقطة الأصل

$$= \sqrt{س^2 + ص^2}$$

عن محور السينات = القيمة المطلقة لـ ص

عن محور الصادات = القيمة المطلقة لـ س

٨
* محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه
* مساحة المثلث = ½ طول القاعدة × الارتفاع

أو ½ حاصل ضرب الضلعين المتعامدين

مثال (١)

إذا كان أ (٢ ، ٥) ، ب (-١ ، ١)

فأوجد طول أب (البعد بينهما)

الحل

أ (٢ ، ٥)   ب (-١ ، ١)

أب = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

= $\sqrt{(-١-٢)^٢ + (١-٥)^٢}$ = $\sqrt{(-٣)^٢ + (-٤)^٢}$

= $\sqrt{٩ + ١٦}$ = ٥ وحدة طول

تمرين (١)

إذا كان أ (١ ، ٢) ، ب (٤ ، ٦)

فأوجد طول أب

الحل

مثال (٢)

إذا كان البعد بين (أ ، ٠)

، (٠ ، ١) هو وحدة طول واحدة

فأوجد قيمة أ

الحل

(أ ، ٠) ، (٠ ، ١)

∴ $\sqrt{(٠ - أ)^٢ + (١ - ٠)^٢}$ = ١

∴ $\sqrt{أ^٢ + ١}$ = ١   بتربيع الطرفين

أ^٢ + ١ = ١   أ^٢ = ١ - ١ = ٠   ∴ أ = ٠

تمرين (٢)

إذا كان البعد بين النقطتين

(أ ، ٧) ، (-٢ ، ٣) = ٥ فأوجد قيمة أ

الحل

مثال (٣)

أثبت أن النقاط أ (-٢ ، ٧) ، ب (-٣ ، ٤)

، جـ (١ ، ١٦) تقع على استقامة واحدة

الحل

أب = $\sqrt{(-٣+٢)^٢ + (٤-٧)^٢}$ = $\sqrt{١+٩}$ = $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

ب جـ = $\sqrt{(١+٣)^٢ + (١٦-٤)^٢}$ = $\sqrt{١٦+١٤٤}$ = ٤$\sqrt{١٠}$ وحدة

أجـ = $\sqrt{(١+٢)^٢ + (١٦-٧)^٢}$ = $\sqrt{٩+٨١}$ = ٣$\sqrt{١٠}$ وحدة طول

∴ ب جـ = ٤$\sqrt{١٠}$

، أب + أجـ = $\sqrt{١٠}$ + ٣$\sqrt{١٠}$ = ٤$\sqrt{١٠}$

∴ ب جـ = ب أ + أ جـ

∴ أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

تمرين (٣)

أثبت أن النقط أ (٤ ، ٣) ، ب (١ ، ١)

، جـ (-٥ ، -٣) تقع على استقامة واحدة

الحل

مثال (٤)

أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط أ(٥، -٥) ، ب(-١، ٧) ، جـ(١٠، ١٠) قائم الزاوية فى ب ثم أوجد مساحته

الحل

$أب = \sqrt{(-١-٥)^٢ + (٧+٥)^٢} = \sqrt{٣٦+١٤٤}$

$= \sqrt{١٨٠}$ وحدة طول

، $بجـ = \sqrt{(١٠+١)^٢ + (١٠-٧)^٢}$

$= \sqrt{٢٥٦+٦٤} = \sqrt{٣٢٠}$ وحدة طول

، $أجـ = \sqrt{(١٠-٥)^٢ + (١٠+٥)^٢}$

$= \sqrt{١٠٠+٤٠٠} = \sqrt{٥٠٠}$ وحدة طول

$(أب)^٢ = ١٨٠$ ، $(بجـ)^٢ = ٣٢٠$ ، $(أجـ)^٢ = ٥٠٠$

$\therefore (أجـ)^٢ = (أب)^٢ + (بجـ)^٢$

$\therefore$ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب

مساحة Δ أبجـ $= \frac{١}{٢}$ أب $\times$ بجـ

$= \frac{١}{٢} \sqrt{١٨٠} \times \sqrt{٣٢٠} = ١٢٠$ وحدة مربعة

تمرين (٤)

اثبت أن المثلث الذى رؤوسه أ(٣، ٢) ، ب(-٤، ١) ، جـ(٢، -١) قائم الزاوية وأوجد مساحته

الحل

مثال (٥)

أثبت أن النقط أ(٠، ١) ، ب(٤، ٥) ، جـ(١، ٨) ، د(-٣، ٤) هى رؤوس مستطيل ثم احسب طول قطره

الحل

$أب = \sqrt{(٤-٠)^٢ + (٥-١)^٢}$

$= \sqrt{١٦+١٦} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول

، $بجـ = \sqrt{(٤-١)^٢ + (٥-٨)^٢}$

$= \sqrt{٩+٩} = ٣\sqrt{٢}$ وحدة طول

، $جـد = \sqrt{(١+٣)^٢ + (٨-٤)^٢}$

$= \sqrt{١٦+١٦} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول

، $أد = \sqrt{(٠+٣)^٢ + (١-٤)^٢}$

$= \sqrt{٩+٩} = ٣\sqrt{٢}$ وحدة طول

، $أجـ = \sqrt{(٠-١)^٢ + (١-٨)^٢}$

$= \sqrt{١+٤٩} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة طول

، $بد = \sqrt{(٤+٣)^٢ + (٥-٤)^٢}$

$= \sqrt{٤٩+١} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة طول

$\therefore$ أب = جـد ، بجـ = أد ، أجـ = بد

$\therefore$ الشكل أبجـد مستطيل

وطول قطره $= ٥\sqrt{٢}$ وحدة طول

تمرين (٥)

اثبت أن النقط أ(-٦، ٢) ، ب(٠، ٨)

تقع على دائرة مركزها م(-٤، ٦)

ثم أوجد محيطها ومساحتها $\pi = ٣{,}١٤$

الواجب

[١] أوجد طول أب في الحالات الآتية

① أ(١ ، ٢) ، ب(٤ ، ٦)

② أ(-٢ ، ٧) ، ب(٣ ، -٥)

③ أ(١٥ ، ٠) ، ب(٦ ، ٠)

④ أ(٢ ، -٣) ، ب(-١ ، ١)

[٢] بين أي من النقط التالية تقع على استقامة واحدة

① أ(٤ ، ٣) ، ب(١ ، ١) ، جـ(-٥ ، -٣)

② أ(١ ، ٤) ، ب(٣ ، -٢) ، جـ(-٣ ، ١٦)

③ أ(٧ ، ٠) ، ب(-٣ ، ٦) ، جـ(٢ ، ٩)

[٣] أثبت أن

① المثلث الذي رؤوسه أ(-١ ، -١) ، ب(٢ ، ٣) ، جـ(٦ ، ٠) قائم الزاوية

② المثلث الذي رؤوسه أ(٥ ، ٠) ، ب(٧ ، ٢√٣) ، جـ(٣ ، ٢√٣) متساوي الأضلاع ثم أوجد محيطه.

③ الشكل أ(-١ ، ١) ، ب(٠ ، ٥) ، جـ(٥ ، ٦) ، د(٤ ، ٢) متوازي أضلاع

④ الشكل أ(٣ ، ٣) ، ب(٠ ، ٣) ، جـ(٠ ، ٠) ، د(٣ ، ٠) هو مربع ثم احسب طول قطره ومساحته

⑤ النقط أ(٣ ، -١) ، ب(-٤ ، ٦) ، جـ(٢ ، -٢) تقع على محيط دائرة م(-١ ، ٢) ثم احسب محيط الدائرة ومساحتها (π = ٣٫١٤)

[٤] إذا كان البعد بين أ(٢ ، س) ، ب(٣ ، -١) = √١٧ فأوجد قيمة س

[٥] إذا كان أ(س ، ٣) ، ب(٣ ، ٢) ، جـ(٥ ، ١) وكانت أب = بجـ فأوجد قيمة س

[٦] أكمل

① البعد بين أ(٦ ، ٠) ، ب(٠ ، ٨) = ----

② طول نصف قطر الدائرة التي مركزها (٧ ، ٤) وتمر بالنقطة (٣ ، ١) = ----

③ إذا كان أ ب جـ د مربع وكان أ(٣ ، ٥) ، ب(٢ ، ٤) فإن مساحته = ---- وحدة مربعة

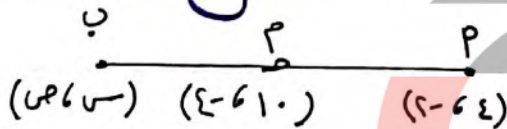
④ بعد النقطة (-٣ ، ٤) عن نقطة الأصل = ----
وعن محور السينات = ----
وعن محور الصادات = ----

⑤ بعد النقطة (-٦ ، -٨) عن نقطة الأصل = ----
وعن محور السينات = ---- وعن محور الصادات = ----

⑥ طول قطر الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٣ ، -٤) = ----

٢ – إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

ملاحظات زي كل مرة

١) إذا كان أ (س١، ص١) ، ب (س٢، ص٢)
فإن منتصف $\overline{أب}$ = ((س١ + س٢) / ٢ ، (ص١ + ص٢) / ٢)

٢) إذا كان المطلوب نقطة على الطرف وليس المنتصف نفرضها (س، ص) ثم نكون معادلتين ونحلهم كما سنرى بعد شوية
حلوة بعد شوية دي؟

٣) (أ، ب) = (جـ، د)
∴ أ = جـ ، ب = د

٤) إذا كان $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م
فإن مركز الدائرة هو منتصف $\overline{أب}$ م

مثال (١)

أوجد منتصف $\overline{أب}$ في كل مما يلي

١) أ (١، ٥) ، ب (٣، ١)
م = ((١ + ٣) / ٢ ، (٥ + ١) / ٢) = (٢، ٣)

٢) أ (٣، -٢) ، ب (٥، ٢)
م = (،   ) = (،   )

٣) أ (-١، ٢) ، ب (٥، -٤)

مثال (٢)

إذا كانت جـ (١٠، -٤) هي منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٤، -٢) فأوجد ب

الحل

أ (٤، -٢) ——— م (١٠، -٤) ——— ب (س، ص)

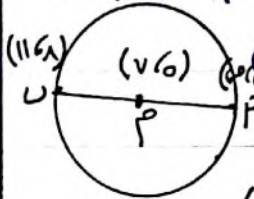
(١٠، -٤) = ((٤ + س) / ٢ ، (-٢ + ص) / ٢)

∴ (٤ + س) / ٢ = ١٠   ٤ + س = ٢٠
∴ س = ٢٠ - ٤ = ١٦

(-٢ + ص) / ٢ = -٤   -٢ + ص = -٨
ص = -٨ + ٢ = -٦

∴ ب (١٦، -٦)

تمرين (٢)

إذا كان جـ (٢، ٥) هي منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (-٢، -٣) فأوجد احداثيات ب

الحل

مثال (٣)

أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ (٣، ٢) ، ب (٤، -٥) ، جـ (٠، -٣) فأوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطريه ثم أوجد إحداثيي نقطة د

الحل

∵ إحداثيي نقطة تقاطع قطريه (منتصف $\overline{أجـ}$ أو $\overline{بد}$)

م = $\left(\frac{٣+٠}{٢} ، \frac{٢-٣}{٢}\right)$ = $\left(١\frac{١}{٢} ، -\frac{١}{٢}\right)$

∴ نقطة تقاطع قطراه هي $\left(١\frac{١}{٢} ، -\frac{١}{٢}\right)$ # أولاً

بفرض أنه د (س، ص)

∵ م منتصف $\overline{بد}$

∴ $\left(١\frac{١}{٢} ، -\frac{١}{٢}\right) = \left(\frac{س+٤}{٢} ، \frac{ص-٥}{٢}\right)$

∴ $\frac{س+٤}{٢} = ١\frac{١}{٢}$ ⟸ ∴ س + ٤ = ٣

∴ س = ٣ - ٤ = -١

، $\frac{ص-٥}{٢} = -\frac{١}{٢}$ ⟸ ص - ٥ = -١

ص = -١ + ٥ = ٤

∴ د (-١، ٤) # ثانياً

تمرين (٣)

إذا كان $\overline{أب}$ قطراً في الدائرة م حيث أ (٤، -١) ، ب (-٢، ٧) فأوجد إحداثيي م ثم أوجد محيط ومساحة الدائرة .

مثال (٤)

إذا كان $\overline{أب}$ قطراً في دائرة مركزها م فإذا كان ب (٨، ١١) ، م (٥، ٧) فأوجد

١) إحداثيي أ

٢) محيط الدائرة حيث π = ٣,١٤

الحل

بفرض أن أ (س، ص)

∴ (٥، ٧) = $\left(\frac{س+٨}{٢} ، \frac{ص+١١}{٢}\right)$

∴ $\frac{س+٨}{٢} = ٥$ ⟸ س + ٨ = ١٠

س = ١٠ - ٨ ⟸ ∴ س = ٢

، ∴ $\frac{ص+١١}{٢} = ٧$ ⟸ ص + ١١ = ١٤

ص = ١٤ - ١١ ⟸ ∴ ص = ٣

∴ أ (٢، ٣)

محيط الدائرة = π × طول القطر أو ٢ π نق

نق = م ب = $\sqrt{(٨-٥)^٢ + (١١-٧)^٢}$

= $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × ٣,١٤ × ٥

= ٣١,٤ وحدة طول

الواجب

١ أوجد احداثيات منتصف $\overline{أب}$

١) أ(٣، ٥) ، ب(٧، ١)
٢) أ(٢، ٤) ، ب(٦، ٠)
٣) أ(٧، -٦) ، ب(-١، ٠)
٤) أ(٥، -٣) ، ب(-١، ٣)

٢ إذا كان:

١) حـ(٤، ٦) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(س، ٣) ، ب(٦، ص) فأوجد قيمة س، ص
٢) حـ(٢، -٦) منتصف $\overline{أب}$ ، أ(س، ٤) ، ب(-٢، ص) فأوجد س، ص
٣) حـ(١، ٥) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(٣، ٧) فأوجد احداثيي ب
٤) م(٢، ١) مركز الدائرة التي $\overline{أب}$ قطر فيها وكان أ(٠، ٤) فأوجد ب
٥) (٢أ-٣ ، أ-ب) منتصف القطعة التي طرفاها (٧، -١) ، (٣، ٧) فأوجد قيمتي أ، ب

٣ أثبت أن

أ(٣، -٢) ، ب(-٥، ٠) ، حـ(٠، -٧) ، ء(٨، -٩) هي رؤوس متوازي اضلاع ← ارشاد اثبت أن منتصف $\overline{أحـ}$ هو نفسه $\overline{بء}$

٤ أثبت أن أ(-٣، ٠) ، ب(٣، ٤) ، حـ(-١، -٦) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين رأسه أ ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ عمودية على $\overline{بحـ}$

٥ أثبت أن أ(٦، ٠) ، ب(٢، -٤) ، حـ(-٤، ٢) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب ثم أوجد إحداثيي نقطة ء التي تجعل الشكل أبحـء مستطيل.

٦ أكمل

١) منتصف (٥، ٢) ، (-١، -٤) هو ----
٢) منتصف (٣، ١) ، (-١، -٥) هو ----
٣) $\overline{أب}$ قطر في الدائرة حيث أ(-١، ٤) ، ب(٧، ٦) فإن مركز الدائرة = ----
٤) إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(٥، -٢) فإن ب = ----
٥) إذا كان أ(٣، ص) ، ب(٥، -٢) ، حـ منتصف $\overline{أب}$ حيث حـ(س، ٢) فإن س = ---- ، ص = ----

كفاية عليكوا كده؟

٣ – ميل الخط المستقيم

خللى بالك

[١] ميل المستقيم المار بالنقطتين

(س١، ص١) ، (س٢، ص٢)

= فرق الصادات / فرق السينات = (ص٢ − ص١) / (س٢ − س١)

مثال (١)

أوجد ميل المستقيم المار بكل زوج من النقاط التالية

(١) أ(٢، ٠) ، ب(٧، ٥)

الحل

س١ = ٢ ، ص١ = ٠ ، س٢ = ٧ ، ص٢ = ٥

الميل = (ص٢ − ص١) / (س٢ − س١) = (٥ − ٠) / (٧ − ٢)

= ٥/٥ = ١

(٢) (٤، ٢) ، (٥، ٦)

الحل

خللى بالك تانى

[١] ميل الخط المستقيم هو ظل الزاوية التى يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

[٢] ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = صفر

(صفر / عدد = البسط = صفر)

[٣] ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات غير معرف

(يعنى عدد / صفر المقام = ٠)

[٤] العلاقة بين الميل والزاوية

حادة ، منفرجة ، صفرية ، قائمة

القياس الموجب والسالب

* القياس الموجب فى عكس اتجاه عقارب الساعة

* القياس السالب فى اتجاه عقارب الساعة

مثال (١)

أوجد ميل المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

(١) $٤٥°$

م = ظا ٤٥° = ١

(٢) $١٢٤° ١٥' ١٢''$

م = ظا ١٢٤° ١٥' ١٢'' = −١٫٤٦٨٥

(٣) $٣٠°$

(٤) $٦٠°$

(٥) $٩٠°$ (عمودى على محور السينات)

موازى لمحور الصادات

الميل غير معرف

(٦) صفر

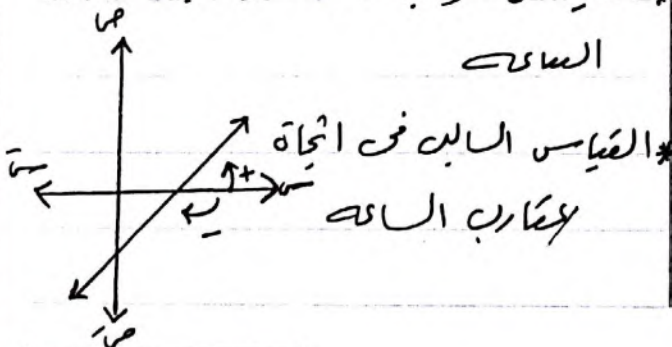
مثال (٢)

أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان

(١) م = ١٫٤٨٦

∵ م = ظا هـ ∴ ظا هـ = ١٫٤٨٦

∴ هـ = ٥٦° ٣' ٤١''

(٢) $\sqrt{٣}$

مثال (٣)

أوجد قياس الزاوية (هـ) التى يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان يمر بالنقطتين

(١) $(-٢، \sqrt{٣})$ ، $(١، ٤\sqrt{٣})$

الحل

ميل ل = $\frac{٤\sqrt{٣} - \sqrt{٣}}{١ + ٢} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٣}$

م = $\sqrt{٣}$ الميل موجب ∴ الزاوية حادة

∴ ظا هـ = $\sqrt{٣}$

∴ هـ = ٦٠°

(٢) $(-٢، ٣)$ ، $(-٣، ٤)$

الحل

ميل ل = $\frac{٤ - ٣}{-٣ + ٢} = \frac{١}{-١} = -١$

الميل سالب ∴ الزاوية منفرجة

∵ ظا هـ = −١

∴ هـ = ١٣٥° (١٨٠° − ٤٥°)

(٣) $(-٤، -١)$ ، $(٥، -٣)$

الحل

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين

(١) إذا توازى مستقيمان فإن ميلاهما يكونان متساويان

ل١ // ل٢ ∴ م١ = م٢

(٢) إذا تساوى ميلا مستقيمان فإن المستقيمان يكونان متوازيان

م١ = م٢ ∴ ل١ // ل٢

(٣) لإثبات أن أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة فلابد أن يكون

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$

مثال (١)

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (-١ ، ٦) يوازي المستقيم الذي يصنع ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

م١ = $\frac{٦ - ٣}{-١ - ٢}$ = $\frac{٣}{-٣}$ = -١

م٢ = ظا ١٣٥ = -١

∴ م١ = م٢ ∴ ل١ // ل٢

تمرين (١)

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٥) ، (-٢ ، -١) يوازي المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، -١) ، (٥ ، ٩)

الحل

مثال (٣)

اثبت أن النقط أ (١ ، ١) ، ب (٢ ، ٣) ، د (٠ ، -١) تقع على استقامة واحدة

الحل

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٣ - ١}{٢ - ١}$ = $\frac{٢}{١}$ = ٢

ميل $\overleftrightarrow{ب د}$ = $\frac{-١ - ٣}{٠ - ٢}$ = $\frac{-٤}{-٢}$ = ٢

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب د}$ لهما نفس الميل ومشتركين من النقطة ب

∴ أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

تمرين (٣)

اثبت أن النقط أ (-١ ، ٦) ، ب (٣ ، -٤) ، جـ (٢ ، -٥ ، ١) تقع على استقامة واحدة

((حل انت))

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتعامدين

١ إذا كان $ل_1 \perp ل_2$ فإن $م_1 \times م_2 = -١$

٢ إذا كان $م_1 \times م_2 = -١$ فإن $ل_1 \perp ل_2$

⇓

إذا كان المستقيمان متعامدان فإن حاصل ضرب ميلاهما = -١ "والعكس صحيح"

٣ في المثلث القائم ضلعي القائمة يكونان متعامدان (حاصل ضرب ميلاهما = -١)

مثال (١)

اثبت أن المستقيم $ل_1$ المار بالنقطتين (-١، ٤)، (٣، ٧) يكون عمودياً على المستقيم $ل_2$ المار (١، ١)، (٤، -٣)

الحل

$ميل\ ل_1 = \frac{٧ - ٤}{٣ + ١} = \frac{٣}{٤}$

، $ميل\ ل_2 = \frac{-٣ - ١}{٤ - ١} = \frac{-٤}{٣}$

$\because م_1 \times م_2 = \frac{٣}{٤} \times \frac{-٤}{٣} = -١$

$\therefore ل_1 \perp ل_2$ #

ملحوظة عشان نجيب ميل العمود بنقلب الكسر ونغير إشارة واحدة:

$\frac{٢}{٣} \perp \frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٦} \perp \frac{-٦}{٥}$ ، $٤ \perp \frac{-١}{٤}$ وهكذا.

تمرين (١)

اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٤، ٣√٣)، (٥، ٢√٣) عمودي على المستقيم الذي يصنع ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

إذا كانت أ(١، ٧)، ب(٢، ٤)، جـ(٥، ص) تمثل رؤوس مثلث قائم في ب فأوجد قيمة ص

الحل

$م_1\ ميل\ \overleftrightarrow{أب} = \frac{٤ - ٧}{٢ - ١} = -٣$

$م_2\ ميل\ \overleftrightarrow{بجـ} = \frac{ص - ٤}{٥ - ٢} = \frac{ص - ٤}{٣}$

$\because \overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{بجـ}$

$\therefore م_1 \times م_2 = -١$

$\therefore -٣ \times \frac{ص - ٤}{٣} = -١$

$-ص + ٤ = -١$

$-ص = -١ - ٤$ ، $-ص = -٥$

$\therefore ص = ٥$

ملاحظات لحل مسائل الأشكال الرباعية باستخدام الميل

(١) لإثبات أن الشكل شبه منحرف
نثبت أن ضلعان متقابلان متوازيان والضلعان الآخران غير متوازيان

(٢) لإثبات أن الشكل متوازي أضلاع
نثبت واحدة فقط مما يلي
1. كل ضلعين متقابلين متوازيين
2. كل ضلعين متقابلين متساويين في الطول
3. ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان
4. القطران ينصف كل منهما الآخر.

بعد إثبات أن الشكل متوازي أضلاع أولاً

(أ) مستطيل (واحدة فقط)
1. ضلعان متجاوران متعامدان أو
2. القطران متساويان في الطول

(ب) معين (واحدة فقط)
1. القطران متعامدان أو
2. ضلعان متجاوران متساويان في الطول

(جـ) مربع (واحدة فقط)
1. ضلعان متجاوران متعامدان ومتساويان
2. القطران متساويان في الطول ومتعامدان
3. ضلعان متجاوران متعامدان والقطران متعامدان
4. ضلعان متجاوران متساويان والقطران متساويان

مثال (١)
باستخدام الميل اثبت أن النقاط أ(-١، ٣) ، ب(٥، ١) ، جـ(٦، ٤) ، د(٠، ٦) رؤوس مستطيل

الحل

ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٣-١}{١+٥} = -\frac{١}{٣}$

ميل $\overleftrightarrow{جـد} = \frac{٦-٤}{٠-٦} = \frac{٢}{-٦} = -\frac{١}{٣}$

$\therefore \overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{جـد}$ ⟸ (١)

ميل $\overleftrightarrow{أد} = \frac{٦-٣}{٠+١} = \frac{٣}{١} = ٣$

ميل $\overleftrightarrow{بجـ} = \frac{٤-١}{٦-٥} = \frac{٣}{١} = ٣$

$\therefore \overleftrightarrow{أد} \parallel \overleftrightarrow{بجـ}$ ⟸ (٢)

$\therefore$ من (١) ، (٢)

$\therefore$ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع

$\because$ ميل $\overleftrightarrow{أب} = -\frac{١}{٣}$ ، ميل $\overleftrightarrow{بجـ} = ٣$

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{بجـ} = -\frac{١}{٣} \times ٣ = -١$

$\therefore \overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{بجـ}$

$\therefore$ الشكل أ ب جـ د مستطيل

تمرين (١)
أ ب جـ د معين فيه أ(٣، ٢) ، ب(٤، ك) ، د(-١، -٢)

أوجد
1. قيمة ك
2. طول $\overline{بك}$

الواجب

١ أوجد ميل المستقيم المار بكل من
① (١، ٢) ، (٣، ٦)
② (٠، ٥) ، (-٣، ٤)
③ (-٢، ١) ، (٢، ١)
④ (٣، ٢) ، (٣، -١)

٢ أوجد ميل المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
① ٣٠° ② صفر°
③ ٤٢ َ ٨٦° ④ ٩٠°
⑤ ٦٠° ⑥ ٤٥°

٣ اثبت أن النقط أ(١، ١) ، ب(٢، ٣) ، حـ(٠، -١) تقع على استقامة واحدة

٤ اثبت أن المستقيم المار بـ (٤، ٢) ، (٦، ٦) يوازى المستقيم المار بـ (٠، ٥) ، (-١، ١)

٥ اثبت أن المستقيم المار بـ (-٣، ٤) ، (-٤، -٢) عمودى على المستقيم المار (١، ٢) ، (-٣، ٢)

٦ أوجد ميل المستقيم الموازى والعمودى للمستقيم المار (٢، -٣) ، (٣، ٥)

٧ اثبت أن المستقيم المار (٢، -١) ، (٦، ٣) يوازى المستقيم الذى يصنع ٤٥° مع +محور س

٨ إذا كان المثلث أ(٣، -١) ، ب(س، ٣) ، جـ(٥، ٣) قائم الزاوية فى أ فأوجد قيمة س

٩ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ // محور الصادات حيث أ(س، ٧) ، ب(٣، ٥) فأوجد قيمة س ⟸ الميل غير معرف = عدد/صفر

١٠ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{حـ ء}$ // محور السينات حيث حـ(٤، ٢) ، ء(-٥، ص) فأوجد قيمة ص ⟸ الميل = صفر = صفر/عدد

١١ إذا كانت النقط (٠، ١) ، (٢، أ) ، (٢، ٥) على استقامة واحدة فأوجد «أ»

١٢ إذا كانت أ(-١، -١) ، ب(٢، ٣) ، حـ(٦، ٠) فاثبت أن المثلث قائم الزاوية فى ب

١٣ أثبت أن النقط أ(-١، ١) ، ب(٠، ٥) ، حـ(٤، ٢) ، ء(٥، ٦) هى رؤوس متوازى أضلاع أ ب حـ ء

١٤ أثبت أن النقط أ(١، ٣) ، ب(٦، ٤) ، حـ(٧، ٩) ، ء(٢، ٨) هى رؤوس المعين أ ب حـ ء

١٥ أثبت أن النقط أ(-١، -١) ، ب(٢، ٣) ، حـ(٦، ٠) ، ء(٣، -٤) هى رؤوس مربع

١٦ أكمل
① ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = ----
② ميل " " " الصادات = ----
③ إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{حـ ء}$ ، ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢}{٣}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ = ---- ، ميل العمودى عليه = ----

٤ ـ معادلة الخط المستقيم

الحالة الأولى

المستقيم على صورة $ص = م س + جـ$

خواصه

$م \Leftarrow$ الميل

$جـ \Leftarrow$ هو الجزء المقطوع من محور الصادات

والمستقيم يمر بالنقطة $(٠ ، جـ)$ يقطع محور الصادات

الحالة الثانية

الصورة $أ س + ب ص + جـ = ٠$

خواصه

الميل $= \frac{-أ}{ب} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

الجزء المقطوع من محور الصادات $= \left|\frac{-جـ}{ب}\right|$

ويقطع محور الصادات في $(٠ ، \frac{-جـ}{ب})$

أمثلة (الحالة الأولى)

① المستقيم $ص = \frac{١}{٢} س + ٧$

ميله $= \frac{١}{٢}$

ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٧ وحدات

ويمر بالنقطة $(٠ ، ٧)$

② المستقيم $ص = -٢ س - ٣$

ميله $= -٢$

ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٣ وحدات

ويمر بالنقطة $(٠ ، -٣)$

③ المستقيم $ص = س - ٢$

ميله $= ١$ «أكمل»

أمثلة (الحالة الثانية)

① المستقيم $س - ٢ص + ٣ = ٠$

ميله $= \frac{-١}{-٢} = \frac{١}{٢}$

ويقطع محور الصادات في $(٠ ، \frac{٣}{٢})$

أي أنه يقطع من الاتجاه الموجب لمحور الصادات $\frac{٣}{٢}$ من وحدة

② إذا كان المستقيم $٣ص + س - ٧ = ٠$ ، $ص = ك س + ٥$ متعامدان

فأوجد قيمة ك

الحل

$م_١ = \frac{-١}{٣}$ ، $م_٢ = ك$

$\because ل_١ \perp ل_٢ \quad \therefore م_١ \times م_٢ = -١$

$\therefore \frac{-١}{٣} \times ك = -١$

$-ك = -٣ \quad \therefore ك = ٣$

لإيجاد معادلة المستقيم الذى ميله م ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات جـ أو يقطع محور الصادات فى (٠ ، جـ)

∴

⟸ ص = م س + جـ

حالات خاصة

① معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل (٠ ، ٠) هى ص = م س

② معادلة محور السينات هى ص = ٠

③ معادلة محور الصادات هى س = ٠

④ معادلة الموازى لمحور السينات ويمر بالنقطة (س، ص) هى ص = الاحداثى الصادى

⑤ معادلة الموازى لمحور الصادات ويمر بالنقطة (س، ص) هى س = الاحداثى السينى

أكمل

① معادلة المستقيم الموازى لمحور السينات ويمر بالنقطة (٣ ، -٢) هى ص = -٢

② معادلة المستقيم الموازى لمحور الصادات ويمر بالنقطة (-٣ ، ٥) هى س = -٣

③ معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وميله = ٢ هى ص = ٢ س

③ أوجد ميل المستقيم ٢ ص = ٣ س + ١٢ وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

الحل

٢ ص = ٣ س + ١٢ (÷ ٢)

ص = $\frac{٣}{٢}$ س + ٦

الميل = $\frac{٣}{٢}$

ويقطع ٦ وحدات من الجزء الموجب لمحور الصادات

④ أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم ٣ س - ٣ ص + ٥ = ٠ مع محور السينات

الحل

⑤ أوجد الميل والجزء المقطوع لمحور الصادات للمستقيم $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$

الحل

$\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$ (بالضرب × ٦)

٣ س + ٢ ص = ٦

٢ ص = - ٣ س + ٦ (÷ ٢)

ص = $\frac{-٣}{٢}$ س + ٣

∴ الميل = $\frac{-٣}{٢}$ والمستقيم يقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٣ وحدات

مثال (١)

اكتب معادلة المستقيم الذى

(١) ميله = $\frac{-٣}{٤}$ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٣ وحدات

الحل

م = $\frac{-٣}{٤}$ ، جـ = ٣

∴ المعادلة هي ص = م س + جـ

∴ ص = $\frac{-٣}{٤}$ س + ٣

(٢) ميله = ٢ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٥ وحدات طول

الحل

ص = م س + جـ

ص = ٢ س + (-٥)

ص = ٢ س - ٥

مثال (٢)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١ ، -١) ، (٢ ، ٢)

الحل

ص = م س + جـ

م = $\frac{٢ + ١}{٢ - ١}$ = $\frac{٣}{١}$ = ٣

∵ المستقيم يمر بالنقطة (١ ، -١)

س = ١ ، ص = -١

-١ = ٣ + جـ

∴ جـ = -١ -٣ = -٤

∴ معادلة المستقيم هي ص = ٣ س - ٤

تمرين (١)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٤)

الحل

مثال (٢)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) وموازياً للمستقيم ٢ س + ٣ ص - ٦ = ٠

الحل

ميل المستقيم المعطى = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٢}{٣}$

∴ ميل المطلوب = $\frac{-٢}{٣}$

∴ معادلة المستقيم المطلوب ص = $\frac{-٢}{٣}$ س + جـ

∵ (١ ، ٢) تنتمي للمستقيم

∴ ٢ = $\frac{-٢}{٣}$ + جـ

∴ جـ = ٢ + $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{٨}{٣}$

تكون المعادلة هي ص = $\frac{-٢}{٣}$ س + $\frac{٨}{٣}$

تمرين (٢)

اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) وعمودياً على المستقيم المار بالنقطتين م (٣ ، -٤) ، ن (٥ ، -٣)

مثال (٣)

إذا كان المستقيم ل: ٢س - ٣ص - ٦ = ٠

يقطع محور السينات عند أ ومحور الصادات عند ب فأوجد

(١) إحداثي النقطتين أ ، ب

(٢) معادلة المستقيم المار بمنتصف $\overline{أب}$ ويوازي محور الصادات

الحل

(١) نفرض أن أ (س ، ٠)

∴ عندما ص = ٠ ∴ ٢س - ٣ × ٠ - ٦ = ٠

∴ ٢س = ٦ س = ٣

∴ نقطة التقاطع مع محور السينات أ (٣ ، ٠)

، نفرض أن ب (٠ ، ص) عندما س = ٠

∴ ٢ × ٠ - ٣ص - ٦ = ٠

- ٣ص = ٦ ∴ ص = $\frac{٦}{-٣}$ = -٢

∴ نقطة التقاطع مع محور الصادات ب (٠ ، -٢)

(٢) نفرض أن ء منتصف $\overline{أب}$

ء = $\left(\frac{٣+٠}{٢} ، \frac{٠-٢}{٢}\right)$ = $\left(\frac{٣}{٢} ، -١\right)$

∴ معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة $\left(\frac{٣}{٢} ، -١\right)$

س = $\frac{٣}{٢}$

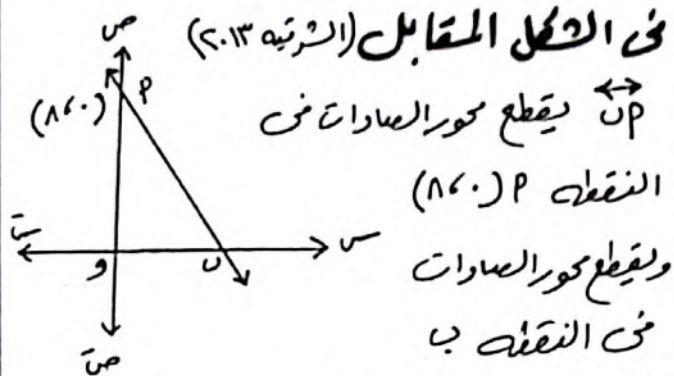
تمرين (٣)

أوجد معادلة محور تماثل $\overline{س ص}$ حيث س (٣ ، -٢) ، ص (٥ ، ٦)

الحل

ملحوظة محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودي عليها من منتصفها

مثال (٤)

في الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١٣)

$\overleftrightarrow{أب}$ يقطع محور الصادات في النقطة أ (٠ ، ٨)

ويقطع محور الصادات في النقطة ب

فإذا كان ظا (أ $\hat{ب}$ و) = $\frac{٤}{٣}$ فأوجد

(١) أولاً ق (ب$\hat{أ}$و) ثانياً إحداثي ب

(٢) أولاً ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

ثانياً معادلة المستقيم المار بالنقطة و وعمودياً على $\overleftrightarrow{أب}$

الحل

(١) أولاً ∵ ظا (أ$\hat{ب}$و) = $\frac{٤}{٣}$

∴ ق (أ$\hat{ب}$و) = ٥٣° ٧َ ٤٨ً

∴ قياس (ب$\hat{أ}$و) = ٩٠° - ٤٨ً ٧َ ٥٣°

= ١٢ً ٥٢َ ٣٦°

ثانياً نفرض أن النقطة ب (س ، صفر)

، ∵ ظا (أ$\hat{ب}$و) = $\frac{٤}{٣}$

∴ $\frac{٨}{س}$ = $\frac{٤}{٣}$ ∴ س = $\frac{٣ \times ٨}{٤}$ = ٦

∴ ب (٦ ، ٠)

(٢) أولاً: ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٠-٨}{٦-٠}$ = $\frac{-٨}{٦}$ = $\frac{-٤}{٣}$

ثانياً ∵ المستقيم المطلوب ⊥ $\overleftrightarrow{أب}$

∴ ميل المطلوب = $\frac{٣}{٤}$

∴ معادلة المستقيم المطلوب ص = $\frac{٣}{٤}$س + ء

، ∵ المستقيم يمر بنقطة الأصل و (٠ ، ٠)

∴ ء = ٠ ∴ المعادلة ص = $\frac{٣}{٤}$ س

مثال (٥)

فى الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١٤)

النقط م (٢ ، ٦) ، و (٠ ، ٠) ، ب (٦ ، ٢) ، د هى رؤوس معين

أوجد

① إحداثى النقطة د
② معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{وء}$
③ ق (دوهـ)

الحل

① ∵ مءبو معين ∴ منتصف $\overline{وء}$ = منتصف $\overline{مب}$ = $(\frac{٦+٢}{٢} ، \frac{٢+٦}{٢})$

= (٤ ، ٤)

∴ منتصف $\overline{وء}$ = (٤ ، ٤)

ونفرض أن د (س ، ص) و(٠ ، ٠)

∴ $(\frac{س+٠}{٢} ، \frac{ص+٠}{٢}) = (٤ ، ٤)$

∴ $\frac{س}{٢} = ٤$ ∴ س = ٨

، $\frac{ص}{٢} = ٤$ ∴ ص = ٨

∴ د (٨ ، ٨)

② ∵ $\overleftrightarrow{وء}$ يمر بنقطة الاصل ، (٨ ، ٨)

∴ المعادلة هى ص = م س

الميل (م) = $\frac{-٨}{٠-٨} = \frac{٨}{٨} = ١$

∴ ص = س

③ ميل $\overleftrightarrow{وء}$ = ظا (دوهـ) = ١

∴ ق (دوهـ) = ٤٥° ∴ ق (دوهـ) = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

مثال (٦)

فى الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١٥)

ل١ // ل٢

$\overleftrightarrow{مب}$ ⊥ ل١

م (١ ، ٥)

أوجد

① معادلة المستقيم ل١
② معادلة المستقيم ل٢
③ طول $\overline{مب}$

الحل

① ∵ ل١ يمر بنقطة الاصل ∴ معادلته ص = م س

∵ ميل المستقيم = ظا ٤٥° = ١

∴ معادلة المستقيم ل هى ص = س

② ∵ ل١ // ل٢

∴ م١ = م٢ = ١

∴ معادلة المستقيم ل٢ هى ص = م س + حـ

، ل٢ يمر بالنقطة م (١ ، ٥)

∴ ٥ = ١ + حـ ∴ حـ = ٥ − ١ = ٤

∴ معادلة ل٢ هى ص = س + ٤

③ نفرض أن ب (س ، ص) ∴ ص = س

، ∵ $\overleftrightarrow{مب}$ ⊥ ل١ ∴ ميل $\overleftrightarrow{مب}$ = −١

∴ $\frac{ص-٥}{س-١} = -١$ ∴ ص − ٥ = −س + ١

، ∵ س = ص ∴ ص − ٥ = −ص + ١

∴ ٢ص = ١ + ٥ = ٦ ∴ ص = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

∴ س = ٣ ∴ ب (٣ ، ٣)

طول $\overline{مب}$ = $\sqrt{(١-٣)^٢ + (٥-٣)^٢}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

الواجب

١) أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات.

① ص = ٣س + ١
② ص = -٢س + ٣
③ ص = ٥س - ٢
④ س/٢ + ٣ص = ٦
⑤ ص + س - ١ = ٠

٢) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات

① ميله = ٣ ، ٥ وحدات
② ميله = -١ ويقطع ٣ وحدات

٣) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله .. ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات

① ميله = -٢ ويقطع ٥ وحدات
② ميله = ١ ويقطع ٣ وحدات

٤) أوجد معادلة الخط المستقيم

① المار بنقطة الأصل ويصنع مع س+ ١٣٥°
② المار بالنقطة (٠، ٢) ويصنع مع س+ ٤٥°
③ الموازى للمستقيم ٢س - ٣ص = ٦ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٣ وحدات
④ المار بالنقطة (٢، -١) وميله = ٢
⑤ المار بالنقطة (-٢، ٣) وعمودى على المستقيم ص = ½ س - ٥
⑥ المار بالنقطة (٣، ٢) ويوازى المستقيم المار بالنقطتين (٥، ٦) ، (-١، ٢)
⑦ المار بالنقطتين (٢، -١) ، (١، ١)
⑧ المار بالنقطتين (٤، ٢) ، (-٢، -١) ثم اثبت أنه يمر بنقطة الأصل.
⑨ الذى يمر بمنتصف القطعة أب حيث أ(٣، ٦) ، ب(-١، ٤) وعمودياً على المستقيم الذى معادلته ٢ص = ٤س - ٥
⑩ محور تماثل أب حيث أ(٤، ٨) ، ب(-٢، ٤)
⑪ يوازى المستقيم ٢ص = ٤س - ٥ وبمنتصف القطعتين أ(٤، ٨) ، (٢، ٤)

٥) أثبت أن المستقيم أب حيث أ(٢، ٣) ، ب(-٢، ١) يوازى المستقيم الذى معادلته س - ٢ص + ٨ = ٠

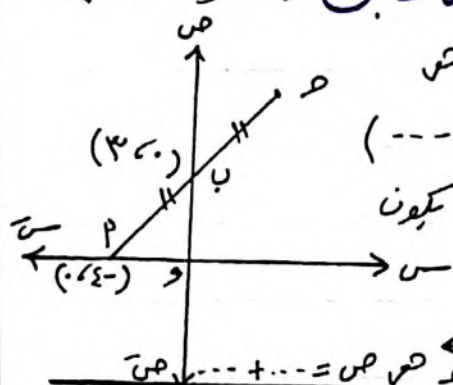
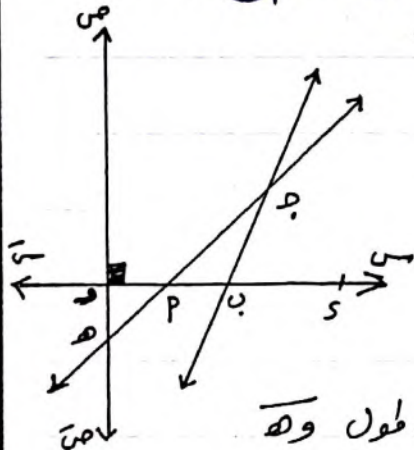
٦) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين أ(٢، ٣) ، ب(-٢، ١) عمودى على المستقيم الذى معادلته ٢س + ص + ٨ = ٠

٧) إذا كان أس + ٢ص - ٣ = ٠ موازياً للمستقيم المار بالنقطتين (٢، ٣) ، (١، ٥) فأوجد قيمة أ

٨) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى السينات والصادات جزئين موجبين طولاهما ٤ ، ٩ على الترتيب

٩) أ ب جـ مثلث فيه أ(١، ٢) ، ب(٥، -٢) ، جـ(٣، ٤) ، د منتصف أب ، رسم دهـ // ب جـ ويقطع أجـ فى هـ

أوجد ① طول دهـ
② معادلة المستقيم دهـ

(١٠) أ ب جـ د مربع فيه أ = (٥، ٤) ، جـ (-١، ٦) أوجد معادلة $\overleftrightarrow{ب د}$

(١١) أ ب جـ د معين ، م تقاطع قطريه حيث أ (١، ٣) ، جـ (٦، ٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين ب، د

(١٢) مستقيم معادلته ص - ٢س - ٣ = ٠ أوجد ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات وارسم هذا المستقيم.

(١٣) الجدول التالي يمثل علاقة خطية

① أوجد معادلة المستقيم

② أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات

③ أوجد قيمة أ

س	١	٢	٣
ص	١	٣	أ

(١٤) اختر الشكل الممثل للمستقيم ص = ٢س + ١

(١٥) في الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١٢)

ل١ // ل٢ ، أ ب = ٧ وحدات طول ومعادلة ل١ ص = ٢س + ٤ فأوجد معادلة ل٢ ....

(١٦) في الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١١)

① نقطة جـ (... ، ...)

② في Δ و أ ب يكون ظا أ = ...

③ معادلة $\overleftrightarrow{أ جـ}$ ص = ... س + ...

(١٧) في الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١٦)

ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$ = ٣/٢ ،

معادلة $\overleftrightarrow{أ هـ}$ س - ص = ٣

أوجد

① ميل $\overleftrightarrow{أ هـ}$ ، طول و هـ

② ق($\hat{جـ ب د}$) ، ق($\hat{جـ أ د}$)

③ استنتج ق($\hat{أ جـ ب}$)

انتهى المنهج مع أطيب
تمنياتي القلبية
بالنجاح والتفوق
م/ محمد أدهم